Analisi e Geometria 2

2 maggio 2016

1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che sui vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ della base canonica di $\mathbb{R}^3$ è definita da

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_2) = -2\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \quad .$$

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica (fissata sia nel domino sia nel codominio).

b) Determinare una base per il nucleo di F e una base per l'immagine di F .
Studiare l'iniettività, la suriettività e l'invertibilità di F .
Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ che è l'intersezione tra il nucleo di F e l'immagine di F .

c) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile H tali che $A = HDH^{-1}$.

Svolgimento:

a) Incolonnando le coordinate delle immagini dei vettori della base abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

b)

- Poiché la matrice A è costruita rispetto la base canonica, il sottospazio $\operatorname{Im} F$ è generato dalle colonne di A e, osservato che il rango di A risulta $\operatorname{rk} A = 2$, una base di $\operatorname{Im} F$ è

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) .$$

  Inoltre il nucleo $\ker F$, che per il Teorema di "nullità + rango" ha dimensione 1 , risulta essere lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; quindi una base per $\ker F$ è formata dal vettore

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

- F è non suriettiva, non iniettiva e non invertibile. Infatti, da quanto scritto sopra ...
- I vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti perché colonne di una matrice di rango 3 :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

  Questi vettori formano quindi una base del sottospazio vettoriale $\ker F + \operatorname{Im} F$ e di conseguenza $\dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 3$. Per la formula di Grassmann risulta

$$\dim(\ker F \cap \operatorname{Im} F) = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F - \dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

c) Risolvendo l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ (o semplicemente osservando la matrice triangolare A) abbiamo gli autovalori

$$\lambda_0 = 0 \quad (\text{semplice}) \quad , \qquad \lambda_1 = 1 \quad (\text{doppio}) \; .$$

L'autovalore $\lambda_0 = 0$ è semplice, quindi regolare, e il relativo autospazio è

$$V_0 = \ker F = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} ;$$

L'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica $3 - \mathrm{rk}(A - I) = 3 - 1 = 2$, quindi è regolare; il relativo autospazio è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omegeneo $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che risulta essere

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y = 0 \right\} = \mathrm{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poiché tutti gli autovalori sono reali e regolari, la matrice A è diagonalizzabile. A è simile alla matrice diagonale D e una matrice di passaggio è H, dove

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 5y' + 6y = 3\,\mathrm{e}^x .$$

Svolgimento:

L'equazione omogenea associata è $y'' - 5y' + 6y = 0$. Poiché l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, ossia $(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$, si ha $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_{\mathrm{om}}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,\mathrm{e}^{3x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Si tratta ora di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Per fare questo, possiamo utilizzare il metodo di somiglianza e cercare una soluzione particolare della forma $y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x$. Risulta

$$y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x \quad , \quad y'(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x \quad , \quad y''(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x$$

e sostituendo nell'equazione differenziale completa si ottiene

$$\alpha\,\mathrm{e}^x - 5\alpha\,\mathrm{e}^x + 6\alpha\,\mathrm{e}^x = 3\,\mathrm{e}^x \qquad \text{ossia} \qquad 2\alpha = 3 \qquad \text{quindi} \qquad \alpha = \frac{3}{2}\,;$$

pertanto una soluzione particolare è

$$\widetilde{y}(x) = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^x .$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = y_{\mathrm{om}}(x) + \widetilde{y}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,\mathrm{e}^{3x} + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica che sull'intervallo $(-\pi, \pi]$ è definita da $f(x) = 2\,(x + |x|)$.

a) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Indicata con Sf la serie di Fourier di f, stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $Sf(x)$ converge (puntualmente), precisandone l'eventuale limite.

c) Scrivere il polinomio di Fourier $S_1 f(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ di f di ordine 1.

Svolgimento:

b) La funzione f è continua in ogni punto $x \neq (2k+1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ e presenta un salto finito in $x = (2k+1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$. Quindi, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e risulta

$$Sf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = 2\pi & \text{se } x = (2k+1)\pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 4x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\,\left[x^2\right]_0^{\pi} = 2\pi\,.$$

Inoltre, integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 4x\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\,\left[4x\sin x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 4\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\,\left[\cos x\right]_0^{\pi} = -\frac{8}{\pi} \\ b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 4x\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\,\left[-4x\cos x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -4\cos x\,\mathrm{d}x = 4 + \frac{1}{\pi}\,\left[-4\sin x\right]_0^{\pi} = 4. \end{aligned}$$

In conclusione, il polinomio di Fourier di f di ordine 1 è

$$S_1 f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x = \pi - \frac{8}{\pi}\,\cos x + 4\,\sin x\,.$$

4. Stabilire se la serie

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n\,\frac{5n}{n^2+12}$$

a) converge semplicemente;

b) converge assolutamente.

Svolgimento:

a) Poiché la serie data è a segni alterni, possiamo utilizzare il criterio di Leibniz.
Posto $a_n = \dfrac{5n}{n^2+12}$, si hanno le seguenti proprietà:

- $a_n > 0$ definitivamente,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0\,,$
- a_n è definitivamente decrescente, infatti possiamo considerare la funzione definita da $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+12}$ e osservare che $f'(x) = \dfrac{5\left(12-x^2\right)}{\left(x^2+12\right)^2} \leq 0$ per ogni $x \geq 2\sqrt{3}\,.$

In conclusione, per il criteri di Leibniz, possiamo concludere che la serie data converge semplicemente.

b) Osservato che $a_n = \dfrac{5n}{n^2+12} \sim \dfrac{5}{n}$ per $n \to +\infty$, per il Criterio del Confronto Asintotico abbiamo che la serie dei valori assoluti $\sum \left|(-1)^n\,\dfrac{5n}{n^2+12}\right| = \sum \dfrac{5n}{n^2+12}$ ha lo stesso carattere della serie $\sum \dfrac{5}{n} = 5\sum \dfrac{1}{n}$; poiché la serie armonica $\sum \dfrac{1}{n}$ è divergente, possiamo dire che la serie data non converge assolutamente.

Analisi e Geometria 2

2 maggio 2016

1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che sui vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ della base canonica di $\mathbb{R}^3$ è definita da

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_2) = -3\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \quad .$$

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica (fissata sia nel domino sia nel codominio).

b) Determinare una base per il nucleo di F e una base per l'immagine di F .
Studiare l'iniettività, la suriettività e l'invertibilità di F .
Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ che è l'intersezione tra il nucleo di F e l'immagine di F .

c) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile H tali che $A = HDH^{-1}$.

Svolgimento:

a) Incolonnando le coordinate delle immagini dei vettori della base abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} .$$

b)

- Poiché la matrice A è costruita rispetto la base canonica, il sottospazio $\operatorname{Im} F$ è generato dalle colonne di A e, osservato che il rango di A risulta $\operatorname{rk} A = 2$, una base di $\operatorname{Im} F$ è

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) .$$

  Inoltre il nucleo $\ker F$, che per il Teorema di "nullità + rango" ha dimensione 1 , risulta essere lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; quindi una base per $\ker F$ è formata dal vettore

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

- F è non suriettiva, non iniettiva e non invertibile. Infatti, da quanto scritto sopra ...
- I vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti perché colonne di una matrice di rango 3 :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

  Questi vettori formano quindi una base del sottospazio vettoriale $\ker F + \operatorname{Im} F$ e di conseguenza $\dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 3$. Per la formula di Grassmann risulta

$$\dim(\ker F \cap \operatorname{Im} F) = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F - \dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

c) Risolvendo l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ (o semplicemente osservando la matrice triangolare A) abbiamo gli autovalori

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{(semplice)} \quad , \qquad \lambda_1 = 1 \quad \text{(doppio)} \ .$$

L'autovalore $\lambda_0 = 0$ è semplice, quindi regolare, e il relativo autospazio è

$$V_0 = \ker F = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} ;$$

L'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica $3 - \mathrm{rk}(A - I) = 3 - 1 = 2$, quindi è regolare; il relativo autospazio è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omegeneo $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che risulta essere

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y = 0 \right\} = \mathrm{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poiché tutti gli autovalori sono reali e regolari, la matrice A è diagonalizzabile. A è simile alla matrice diagonale D e una matrice di passaggio è H, dove

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 8y = 4\,\mathrm{e}^x .$$

Svolgimento:

L'equazione omogenea associata è $y'' - 6y' + 8y = 0$. Poiché l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$, ossia $(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$, si ha $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$. Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_{\mathrm{om}}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,\mathrm{e}^{4x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Si tratta ora di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Per fare questo, possiamo utilizzare il metodo di somiglianza e cercare una soluzione particolare della forma $y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x$. Risulta

$$y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x \quad , \quad y'(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x \quad , \quad y''(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x$$

e sostituendo nell'equazione differenziale completa si ottiene

$$\alpha\,\mathrm{e}^x - 6\alpha\,\mathrm{e}^x + 8\alpha\,\mathrm{e}^x = 4\,\mathrm{e}^x \quad \text{ossia} \quad 3\alpha = 4 \quad \text{quindi} \quad \alpha = \frac{4}{3};$$

pertanto una soluzione particolare è

$$\widetilde{y}(x) = \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^x .$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = y_{\mathrm{om}}(x) + \widetilde{y}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,\mathrm{e}^{4x} + \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica che sull'intervallo $(-\pi, \pi]$ è definita da $f(x) = 3\,(x + |x|)$.

a) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Indicata con Sf la serie di Fourier di f, stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $Sf(x)$ converge (puntualmente), precisandone l'eventuale limite.

c) Scrivere il polinomio di Fourier $S_1 f(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ di f di ordine 1.

Svolgimento:

b) La funzione f è continua in ogni punto $x \neq (2k+1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ e presenta un salto finito in $x = (2k+1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$. Quindi, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e risulta

$$Sf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = 3\pi & \text{se } x = (2k+1)\pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 6x\, \mathrm{d}x = \frac{3}{\pi} \left[x^2\right]_0^{\pi} = 3\pi\,.$$

Inoltre, integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 6x \cos x\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[6x \sin x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 6 \sin x\, \mathrm{d}x = \frac{6}{\pi} \left[\cos x\right]_0^{\pi} = -\frac{12}{\pi} \\ b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 6x \sin x\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-6x \cos x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -6 \cos x\, \mathrm{d}x = 6 + \frac{1}{\pi} \left[-6 \sin x\right]_0^{\pi} = 6. \end{aligned}$$

In conclusione, il polinomio di Fourier di f di ordine 1 è

$$S_1 f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x = \frac{3}{2}\pi - \frac{12}{\pi} \cos x + 6 \sin x\,.$$

4. Stabilire se la serie

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{4n}{n^2 + 20}$$

a) converge semplicemente;

b) converge assolutamente.

Svolgimento:

a) Poiché la serie data è a segni alterni, possiamo utilizzare il criterio di Leibniz.

Posto $a_n = \dfrac{4n}{n^2 + 20}$, si hanno le seguenti proprietà:

- $a_n > 0$ definitivamente,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0\,,$
- a_n è definitivamente decrescente, infatti possiamo considerare la funzione definita da $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 20}$ e osservare che $f'(x) = \dfrac{4\left(20 - x^2\right)}{\left(x^2 + 20\right)^2} \leq 0$ per ogni $x \geq 2\sqrt{5}\,.$

In conclusione, per il criteri di Leibniz, possiamo concludere che la serie data converge semplicemente.

b) Osservato che $a_n = \dfrac{4n}{n^2 + 20} \sim \dfrac{4}{n}$ per $n \to +\infty$, per il Criterio del Confronto Asintotico abbiamo che la serie dei valori assoluti $\sum \left| (-1)^n \dfrac{4n}{n^2 + 20} \right| = \sum \dfrac{4n}{n^2 + 20}$ ha lo stesso carattere della serie $\sum \dfrac{4}{n} = 4 \sum \dfrac{1}{n}$; poiché la serie armonica $\sum \dfrac{1}{n}$ è divergente, possiamo dire che la serie data non converge assolutamente.

Analisi e Geometria 2

2 maggio 2016

1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che sui vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ della base canonica di $\mathbb{R}^3$ è definita da

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_2) = -4\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \quad .$$

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica (fissata sia nel domino sia nel codominio).

b) Determinare una base per il nucleo di F e una base per l'immagine di F .
Studiare l'iniettività, la suriettività e l'invertibilità di F .
Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ che è l'intersezione tra il nucleo di F e l'immagine di F .

c) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile H tali che $A = HDH^{-1}$.

Svolgimento:

a) Incolonnando le coordinate delle immagini dei vettori della base abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

b)

- Poiché la matrice A è costruita rispetto la base canonica, il sottospazio $\operatorname{Im} F$ è generato dalle colonne di A e, osservato che il rango di A risulta $\operatorname{rk} A = 2$, una base di $\operatorname{Im} F$ è

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

  Inoltre il nucleo $\ker F$, che per il Teorema di "nullità + rango" ha dimensione 1 , risulta essere lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; quindi una base per $\ker F$ è formata dal vettore

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- F è non suriettiva, non iniettiva e non invertibile. Infatti, da quanto scritto sopra ...
- I vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti perché colonne di una matrice di rango 3 :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \neq 0.$$

  Questi vettori formano quindi una base del sottospazio vettoriale $\ker F + \operatorname{Im} F$ e di conseguenza $\dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 3$. Per la formula di Grassmann risulta

$$\dim(\ker F \cap \operatorname{Im} F) = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F - \dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

c) Risolvendo l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ (o semplicemente osservando la matrice triangolare A) abbiamo gli autovalori

$$\lambda_0 = 0 \quad (\text{semplice}) \quad , \qquad \lambda_1 = 1 \quad (\text{doppio}) \ .$$

L'autovalore $\lambda_0 = 0$ è semplice, quindi regolare, e il relativo autospazio è

$$V_0 = \ker F = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} ;$$

L'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica $3 - \mathrm{rk}(A - I) = 3 - 1 = 2$, quindi è regolare; il relativo autospazio è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omegeneo $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che risulta essere

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y = 0 \right\} = \mathrm{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poiché tutti gli autovalori sono reali e regolari, la matrice A è diagonalizzabile. A è simile alla matrice diagonale D e una matrice di passaggio è H, dove

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 7y' + 10y = 5\,\mathrm{e}^x.$$

Svolgimento:

L'equazione omogenea associata è $y'' - 7y' + 10y = 0$. Poiché l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, ossia $(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$, si ha $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 5$. Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_{\mathrm{om}}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,\mathrm{e}^{5x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Si tratta ora di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Per fare questo, possiamo utilizzare il metodo di somiglianza e cercare una soluzione particolare della forma $y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x$. Risulta

$$y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x \quad , \quad y'(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x \quad , \quad y''(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x$$

e sostituendo nell'equazione differenziale completa si ottiene

$$\alpha\,\mathrm{e}^x - 7\alpha\,\mathrm{e}^x + 10\alpha\,\mathrm{e}^x = 5\,\mathrm{e}^x \quad \text{ossia} \quad 4\alpha = 5 \quad \text{quindi} \quad \alpha = \frac{5}{4};$$

pertanto una soluzione particolare è

$$\widetilde{y}(x) = \frac{5}{4}\,\mathrm{e}^x.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = y_{\mathrm{om}}(x) + \widetilde{y}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,\mathrm{e}^{5x} + \frac{5}{4}\,\mathrm{e}^x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica che sull'intervallo $(-\pi, \pi]$ è definita da $f(x) = 4\,(x + |x|)$.

a) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Indicata con Sf la serie di Fourier di f, stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $Sf(x)$ converge (puntualmente), precisandone l'eventuale limite.

c) Scrivere il polinomio di Fourier $S_1 f(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ di f di ordine 1.

Svolgimento:

b) La funzione f è continua in ogni punto $x \neq (2k+1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ e presenta un salto finito in $x = (2k+1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$. Quindi, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e risulta

$$Sf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = 4\pi & \text{se } x = (2k+1)\pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 8x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\,\left[x^2\right]_0^{\pi} = 4\pi\,.$$

Inoltre, integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 8x\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\,\left[8x\sin x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 8\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{8}{\pi}\,\left[\cos x\right]_0^{\pi} = -\frac{16}{\pi} \\ b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 8x\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\,\left[-8x\cos x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -8\cos x\,\mathrm{d}x = 8 + \frac{1}{\pi}\,\left[-8\sin x\right]_0^{\pi} = 8. \end{aligned}$$

In conclusione, il polinomio di Fourier di f di ordine 1 è

$$S_1 f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x = 2\pi - \frac{16}{\pi}\,\cos x + 8\,\sin x\,.$$

4. Stabilire se la serie

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\,\frac{3n}{n^2+24}$$

a) converge semplicemente;

b) converge assolutamente.

Svolgimento:

a) Poiché la serie data è a segni alterni, possiamo utilizzare il criterio di Leibniz.

Posto $a_n = \dfrac{3n}{n^2+24}$, si hanno le seguenti proprietà:

- $a_n > 0$ definitivamente,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0\,,$
- a_n è definitivamente decrescente, infatti possiamo considerare la funzione definita da $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+24}$ e osservare che $f'(x) = \dfrac{3\left(24-x^2\right)}{\left(x^2+24\right)^2} \leq 0$ per ogni $x \geq 2\sqrt{6}\,.$

In conclusione, per il criteri di Leibniz, possiamo concludere che la serie data converge semplicemente.

b) Osservato che $a_n = \dfrac{3n}{n^2+24} \sim \dfrac{3}{n}$ per $n \to +\infty$, per il Criterio del Confronto Asintotico abbiamo che la serie dei valori assoluti $\sum \left|(-1)^n\,\dfrac{3n}{n^2+24}\right| = \sum \dfrac{3n}{n^2+24}$ ha lo stesso carattere della serie $\sum \dfrac{3}{n} = 3\sum \dfrac{1}{n}$; poiché la serie armonica $\sum \dfrac{1}{n}$ è divergente, possiamo dire che la serie data non converge assolutamente.

Analisi e Geometria 2

2 maggio 2016

1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che sui vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ della base canonica di $\mathbb{R}^3$ è definita da

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_2) = -5\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \quad .$$

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica (fissata sia nel domino sia nel codominio).

b) Determinare una base per il nucleo di F e una base per l'immagine di F .
Studiare l'iniettività, la suriettività e l'invertibilità di F .
Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ che è l'intersezione tra il nucleo di F e l'immagine di F .

c) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile H tali che $A = HDH^{-1}$.

Svolgimento:

a) Incolonnando le coordinate delle immagini dei vettori della base abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

b)

- Poiché la matrice A è costruita rispetto la base canonica, il sottospazio $\operatorname{Im} F$ è generato dalle colonne di A e, osservato che il rango di A risulta $\operatorname{rk} A = 2$, una base di $\operatorname{Im} F$ è

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

  Inoltre il nucleo $\ker F$, che per il Teorema di "nullità + rango" ha dimensione 1 , risulta essere lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; quindi una base per $\ker F$ è formata dal vettore

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- F è non suriettiva, non iniettiva e non invertibile. Infatti, da quanto scritto sopra ...
- I vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti perché colonne di una matrice di rango 3 :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \neq 0.$$

  Questi vettori formano quindi una base del sottospazio vettoriale $\ker F + \operatorname{Im} F$ e di conseguenza $\dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 3$. Per la formula di Grassmann risulta

$$\dim(\ker F \cap \operatorname{Im} F) = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F - \dim (\ker F + \operatorname{Im} F) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

c) Risolvendo l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ (o semplicemente osservando la matrice triangolare A) abbiamo gli autovalori

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{(semplice)} \quad , \qquad \lambda_1 = 1 \quad \text{(doppio)} \ .$$

L'autovalore $\lambda_0 = 0$ è semplice, quindi regolare, e il relativo autospazio è

$$V_0 = \ker F = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} ;$$

L'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica $3 - \mathrm{rk}(A - I) = 3 - 1 = 2$, quindi è regolare; il relativo autospazio è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omegeneo $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che risulta essere

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x-y = 0 \right\} = \mathrm{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poiché tutti gli autovalori sono reali e regolari, la matrice A è diagonalizzabile. A è simile alla matrice diagonale D e una matrice di passaggio è H, dove

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 8y' + 12y = 6\,\mathrm{e}^x .$$

Svolgimento:

L'equazione omogenea associata è $y'' - 8y' + 12y = 0$. Poiché l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$, ossia $(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0$, si ha $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 6$. Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_{\mathrm{om}}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,\mathrm{e}^{6x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Si tratta ora di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Per fare questo, possiamo utilizzare il metodo di somiglianza e cercare una soluzione particolare della forma $y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x$. Risulta

$$y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x \quad , \qquad y'(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x \quad , \qquad y''(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x$$

e sostituendo nell'equazione differenziale completa si ottiene

$$\alpha\,\mathrm{e}^x - 8\alpha\,\mathrm{e}^x + 12\alpha\,\mathrm{e}^x = 6\,\mathrm{e}^x \qquad \text{ossia} \qquad 5\alpha = 6 \qquad \text{quindi} \qquad \alpha = \frac{6}{5}\,;$$

pertanto una soluzione particolare è

$$\widetilde{y}(x) = \frac{6}{5}\,\mathrm{e}^x .$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = y_{\mathrm{om}}(x) + \widetilde{y}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,\mathrm{e}^{6x} + \frac{6}{5}\,\mathrm{e}^x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica che sull'intervallo $(-\pi, \pi]$ è definita da $f(x) = 5\,(x + |x|)$.

a) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Indicata con Sf la serie di Fourier di f, stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $Sf(x)$ converge (puntualmente), precisandone l'eventuale limite.

c) Scrivere il polinomio di Fourier $S_1 f(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ di f di ordine 1.

Svolgimento:

b) La funzione f è continua in ogni punto $x \neq (2k+1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ e presenta un salto finito in $x = (2k+1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$. Quindi, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e risulta

$$Sf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = 5\pi & \text{se } x = (2k+1)\pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 10x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{\pi}\,\left[x^2\right]_0^{\pi} = 5\pi\,.$$

Inoltre, integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 10x\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\,\left[10x\sin x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 10\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{10}{\pi}\,\left[\cos x\right]_0^{\pi} = -\frac{20}{\pi} \\ b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 10x\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\,\left[-10x\cos x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -10\cos x\,\mathrm{d}x = 10 + \frac{1}{\pi}\,\left[-10\sin x\right]_0^{\pi} = 10. \end{aligned}$$

In conclusione, il polinomio di Fourier di f di ordine 1 è

$$S_1 f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x = \frac{5}{2}\pi - \frac{20}{\pi}\,\cos x + 10\,\sin x\,.$$

4. Stabilire se la serie

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n\,\frac{2n}{n^2+28}$$

a) converge semplicemente;

b) converge assolutamente.

Svolgimento:

a) Poiché la serie data è a segni alterni, possiamo utilizzare il criterio di Leibniz.
Posto $a_n = \dfrac{2n}{n^2+28}$, si hanno le seguenti proprietà:

- $a_n > 0$ definitivamente,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0\,,$
- a_n è definitivamente decrescente, infatti possiamo considerare la funzione definita da $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+28}$ e osservare che $f'(x) = \dfrac{2\left(28-x^2\right)}{\left(x^2+28\right)^2} \leq 0$ per ogni $x \geq 2\sqrt{7}\,.$

In conclusione, per il criteri di Leibniz, possiamo concludere che la serie data converge semplicemente.

b) Osservato che $a_n = \dfrac{2n}{n^2+28} \sim \dfrac{2}{n}$ per $n \to +\infty$, per il Criterio del Confronto Asintotico abbiamo che la serie dei valori assoluti $\sum \left|(-1)^n\,\dfrac{2n}{n^2+28}\right| = \sum \dfrac{2n}{n^2+28}$ ha lo stesso carattere della serie $\sum \dfrac{2}{n} = 2\sum \dfrac{1}{n}$; poiché la serie armonica $\sum \dfrac{1}{n}$ è divergente, possiamo dire che la serie data non converge assolutamente.

Analisi e Geometria 2

2 maggio 2016

1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che sui vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ della base canonica di $\mathbb{R}^3$ è definita da

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_2) = -2\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \quad .$$

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica (fissata sia nel domino sia nel codominio).

b) Determinare una base per il nucleo di F e una base per l'immagine di F .
Studiare l'iniettività, la suriettività e l'invertibilità di F .
Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ che è l'intersezione tra il nucleo di F e l'immagine di F .

c) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile H tali che $A = HDH^{-1}$.

Svolgimento:

a) Incolonnando le coordinate delle immagini dei vettori della base abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

b)

- Poiché la matrice A è costruita rispetto la base canonica, il sottospazio $\operatorname{Im} F$ è generato dalle colonne di A e, osservato che il rango di A risulta $\operatorname{rk} A = 2$, una base di $\operatorname{Im} F$ è

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) .$$

  Inoltre il nucleo $\ker F$, che per il Teorema di "nullità + rango" ha dimensione 1 , risulta essere lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; quindi una base per $\ker F$ è formata dal vettore

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

- F è non suriettiva, non iniettiva e non invertibile. Infatti, da quanto scritto sopra ...
- I vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti perché colonne di una matrice di rango 3 :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

  Questi vettori formano quindi una base del sottospazio vettoriale $\ker F + \operatorname{Im} F$ e di conseguenza $\dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 3$. Per la formula di Grassmann risulta

$$\dim(\ker F \cap \operatorname{Im} F) = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F - \dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

c) Risolvendo l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ (o semplicemente osservando la matrice triangolare A) abbiamo gli autovalori

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{(semplice)} \quad , \qquad \lambda_1 = 1 \quad \text{(doppio)} \; .$$

L'autovalore $\lambda_0 = 0$ è semplice, quindi regolare, e il relativo autospazio è

$$V_0 = \ker F = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} ;$$

L'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica $3 - \mathrm{rk}(A - I) = 3 - 1 = 2$, quindi è regolare; il relativo autospazio è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omegeneo $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che risulta essere

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x{+}y = 0 \right\} = \mathrm{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poiché tutti gli autovalori sono reali e regolari, la matrice A è diagonalizzabile. A è simile alla matrice diagonale D e una matrice di passaggio è H, dove

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 3y = 3\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Svolgimento:

L'equazione omogenea associata è $y'' - 4y' + 3y = 0$. Poiché l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, ossia $(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$, si ha $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_{\mathrm{om}}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{3x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Si tratta ora di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Per fare questo, possiamo utilizzare il metodo di somiglianza e cercare una soluzione particolare della forma $y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{x}$. Risulta

$$y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{2x} \quad , \qquad y'(x) = 2\alpha\,\mathrm{e}^{2x} \quad , \qquad y''(x) = 4\alpha\,\mathrm{e}^{2x}$$

e sostituendo nell'equazione differenziale completa si ottiene

$$4\alpha\,\mathrm{e}^{2x} - 8\alpha\,\mathrm{e}^{2x} + 3\alpha\,\mathrm{e}^{2x} = 3\,\mathrm{e}^{2x} \qquad \text{ossia} \qquad -\alpha = 3 \qquad \text{quindi} \qquad \alpha = -3\,;$$

pertanto una soluzione particolare è

$$\widetilde{y}(x) = -3\,\mathrm{e}^{2x}.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = y_{\mathrm{om}}(x) + \widetilde{y}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{3x} - 3\,\mathrm{e}^{2x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica che sull'intervallo $(-\pi, \pi]$ è definita da $f(x) = 2\,(x - |x|)$.

a) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Indicata con Sf la serie di Fourier di f, stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $Sf(x)$ converge (puntualmente), precisandone l'eventuale limite.

c) Scrivere il polinomio di Fourier $S_1 f(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ di f di ordine 1.

Svolgimento:

b) La funzione f è continua in ogni punto $x \neq (2k{+}1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ e presenta un salto finito in $x = (2k{+}1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$. Quindi, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e risulta

$$Sf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = -2\pi & \text{se } x = (2k+1)\pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 4x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\,\big[x^2\big]_{-\pi}^{0} = -2\pi\,.$$

Inoltre, integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 4x\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\,\big[4x\sin x\big]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 4\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\,\big[\cos x\big]_{-\pi}^{0} = \frac{8}{\pi} \\
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 4x\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\,\big[-4x\cos x\big]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -4\cos x\,\mathrm{d}x = 4 + \frac{1}{\pi}\,\big[-4\sin x\big]_{-\pi}^{0} = 4.
\end{aligned}$$

In conclusione, il polinomio di Fourier di f di ordine 1 è

$$S_1 f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x = -\pi + \frac{8}{\pi}\,\cos x + 4\,\sin x\,.$$

4. Stabilire se la serie

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n\,\frac{5n^2}{n^3+12}$$

a) converge semplicemente;

b) converge assolutamente.

Svolgimento:

a) Poiché la serie data è a segni alterni, possiamo utilizzare il criterio di Leibniz.

Posto $a_n = \dfrac{5n^2}{n^3+12}$, si hanno le seguenti proprietà:

- $a_n > 0$ definitivamente,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,
- a_n è definitivamente decrescente, infatti possiamo considerare la funzione definita da $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^3+12}$ e osservare che $f'(x) = \dfrac{5x\left(24-x^3\right)}{\left(x^3+12\right)^2} \leq 0$ per ogni $x \geq 2\sqrt{3}$.

In conclusione, per il criteri di Leibniz, possiamo concludere che la serie data converge semplicemente.

b) Osservato che $a_n = \dfrac{5n^2}{n^3+12} \sim \dfrac{5}{n}$ per $n \to +\infty$, per il Criterio del Confronto Asintotico abbiamo che la serie dei valori assoluti $\sum \left|(-1)^n\,\dfrac{5n^2}{n^3+12}\right| = \sum \dfrac{5n^2}{n^3+12}$ ha lo stesso carattere della serie $\sum \dfrac{5}{n} = 5\sum\dfrac{1}{n}$; poiché la serie armonica $\sum \dfrac{1}{n}$ è divergente, possiamo dire che la serie data non converge assolutamente.

Analisi e Geometria 2

2 maggio 2016

1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che sui vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ della base canonica di $\mathbb{R}^3$ è definita da

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_2) = -3\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \quad .$$

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica (fissata sia nel domino sia nel codominio).

b) Determinare una base per il nucleo di F e una base per l'immagine di F .
Studiare l'iniettività, la suriettività e l'invertibilità di F .
Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ che è l'intersezione tra il nucleo di F e l'immagine di F .

c) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile H tali che $A = HDH^{-1}$.

Svolgimento:

a) Incolonnando le coordinate delle immagini dei vettori della base abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{bmatrix} .$$

b)

- Poiché la matrice A è costruita rispetto la base canonica, il sottospazio $\operatorname{Im} F$ è generato dalle colonne di A e, osservato che il rango di A risulta $\operatorname{rk} A = 2$, una base di $\operatorname{Im} F$ è

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) .$$

Inoltre il nucleo $\ker F$, che per il Teorema di "nullità + rango" ha dimensione 1 , risulta essere lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; quindi una base per $\ker F$ è formata dal vettore

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

- F è non suriettiva, non iniettiva e non invertibile. Infatti, da quanto scritto sopra ...
- I vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti perché colonne di una matrice di rango 3 :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Questi vettori formano quindi una base del sottospazio vettoriale $\ker F + \operatorname{Im} F$ e di conseguenza $\dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 3$. Per la formula di Grassmann risulta

$$\dim(\ker F \cap \operatorname{Im} F) = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F - \dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

c) Risolvendo l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ (o semplicemente osservando la matrice triangolare A) abbiamo gli autovalori

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{(semplice)} \quad , \qquad \lambda_1 = 1 \quad \text{(doppio)} \ .$$

L'autovalore $\lambda_0 = 0$ è semplice, quindi regolare, e il relativo autospazio è

$$V_0 = \ker F = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} ;$$

L'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica $3 - \mathrm{rk}(A - I) = 3 - 1 = 2$, quindi è regolare; il relativo autospazio è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omegeneo $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che risulta essere

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y = 0 \right\} = \mathrm{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poiché tutti gli autovalori sono reali e regolari, la matrice A è diagonalizzabile. A è simile alla matrice diagonale D e una matrice di passaggio è H , dove

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 5y' + 4y = 4\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Svolgimento:

L'equazione omogenea associata è $y'' - 5y' + 4y = 0$. Poiché l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, ossia $(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$, si ha $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_{\mathrm{om}}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{4x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Si tratta ora di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Per fare questo, possiamo utilizzare il metodo di somiglianza e cercare una soluzione particolare della forma $y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{x}$. Risulta

$$y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{2x} \quad , \qquad y'(x) = 2\alpha\,\mathrm{e}^{2x} \quad , \qquad y''(x) = 4\alpha\,\mathrm{e}^{2x}$$

e sostituendo nell'equazione differenziale completa si ottiene

$$4\alpha\,\mathrm{e}^{2x} - 10\alpha\,\mathrm{e}^{2x} + 4\alpha\,\mathrm{e}^{2x} = 4\,\mathrm{e}^{2x} \qquad \text{ossia} \qquad -2\alpha = 4 \qquad \text{quindi} \qquad \alpha = -2\,;$$

pertanto una soluzione particolare è

$$\widetilde{y}(x) = -2\,\mathrm{e}^{2x}.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = y_{\mathrm{om}}(x) + \widetilde{y}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{4x} - 2\,\mathrm{e}^{2x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica che sull'intervallo $(-\pi, \pi]$ è definita da $f(x) = 3\,(x - |x|)$.

a) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Indicata con Sf la serie di Fourier di f , stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $Sf(x)$ converge (puntualmente), precisandone l'eventuale limite.

c) Scrivere il polinomio di Fourier $S_1 f(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ di f di ordine 1 .

Svolgimento:

b) La funzione f è continua in ogni punto $x \neq (2k+1)\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$ e presenta un salto finito in $x = (2k+1)\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$. Quindi, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e risulta

$$Sf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = -3\pi & \text{se } x = (2k+1)\pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 6x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{\pi}\,\left[x^2\right]_{-\pi}^{0} = -3\pi.$$

Inoltre, integrando per parti, si ha

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 6x\cos x\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\ \big[6x\sin x\big]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 6\sin x\ \mathrm{d}x = \frac{6}{\pi}\ \big[\cos x\big]_{-\pi}^{0} = \frac{12}{\pi} \\
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 6x\sin x\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\ \big[-6x\cos x\big]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -6\cos x\ \mathrm{d}x = 6 + \frac{1}{\pi}\ \big[-6\sin x\big]_{-\pi}^{0} = 6.
\end{aligned}
$$

In conclusione, il polinomio di Fourier di f di ordine 1 è

$$
S_1 f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x = -\frac{3}{2}\pi + \frac{12}{\pi}\ \cos x + 6\ \sin x\,.
$$

4. Stabilire se la serie

$$
\sum_{n\geq 0}(-1)^n\ \frac{4n^2}{n^3+20}
$$

a) converge semplicemente;

b) converge assolutamente.

Svolgimento:

a) Poiché la serie data è a segni alterni, possiamo utilizzare il criterio di Leibniz.
Posto $a_n = \dfrac{4n^2}{n^3+20}$, si hanno le seguenti proprietà:

- $a_n > 0$ definitivamente,
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\,,$
- a_n è definitivamente decrescente, infatti possiamo considerare la funzione definita da $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^3+20}$ e osservare che $f'(x) = \dfrac{4x\left(40-x^3\right)}{\left(x^3+20\right)^2} \leq 0$ per ogni $x \geq 2\sqrt{5}\,.$

In conclusione, per il criteri di Leibniz, possiamo concludere che la serie data converge semplicemente.

b) Osservato che $a_n = \dfrac{4n^2}{n^3+20} \sim \dfrac{4}{n}$ per $n \to +\infty$, per il Criterio del Confronto Asintotico abbiamo che la serie dei valori assoluti $\sum \left|(-1)^n\ \dfrac{4n^2}{n^3+20}\right| = \sum \dfrac{4n^2}{n^3+20}$ ha lo stesso carattere della serie $\sum \dfrac{4}{n} = 4\sum \dfrac{1}{n}$; poiché la serie armonica $\sum \dfrac{1}{n}$ è divergente, possiamo dire che la serie data non converge assolutamente.

Analisi e Geometria 2

2 maggio 2016

1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che sui vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ della base canonica di $\mathbb{R}^3$ è definita da

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_2) = -4\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \quad .$$

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica (fissata sia nel domino sia nel codominio).

b) Determinare una base per il nucleo di F e una base per l'immagine di F.
Studiare l'iniettività, la suriettività e l'invertibilità di F.
Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ che è l'intersezione tra il nucleo di F e l'immagine di F.

c) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile H tali che $A = HDH^{-1}$.

Svolgimento:

a) Incolonnando le coordinate delle immagini dei vettori della base abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

b)

- Poiché la matrice A è costruita rispetto la base canonica, il sottospazio $\operatorname{Im} F$ è generato dalle colonne di A e, osservato che il rango di A risulta $\operatorname{rk} A = 2$, una base di $\operatorname{Im} F$ è

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Inoltre il nucleo $\ker F$, che per il Teorema di "nullità + rango" ha dimensione 1, risulta essere lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; quindi una base per $\ker F$ è formata dal vettore

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- F è non suriettiva, non iniettiva e non invertibile. Infatti, da quanto scritto sopra ...
- I vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti perché colonne di una matrice di rango 3:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Questi vettori formano quindi una base del sottospazio vettoriale $\ker F + \operatorname{Im} F$ e di conseguenza $\dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 3$. Per la formula di Grassmann risulta

$$\dim(\ker F \cap \operatorname{Im} F) = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F - \dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

c) Risolvendo l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ (o semplicemente osservando la matrice triangolare A) abbiamo gli autovalori

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{(semplice)} \quad , \qquad \lambda_1 = 1 \quad \text{(doppio)} \ .$$

L'autovalore $\lambda_0 = 0$ è semplice, quindi regolare, e il relativo autospazio è

$$V_0 = \ker F = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\};$$

L'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica $3 - \text{rk}(A - I) = 3 - 1 = 2$, quindi è regolare; il relativo autospazio è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omegeneo $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che risulta essere

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y = 0 \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poiché tutti gli autovalori sono reali e regolari, la matrice A è diagonalizzabile. A è simile alla matrice diagonale D e una matrice di passaggio è H, dove

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 5y = 5\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Svolgimento:

L'equazione omogenea associata è $y'' - 6y' + 5y = 0$. Poiché l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$, ossia $(\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$, si ha $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$. Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_{\text{om}}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{5x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Si tratta ora di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Per fare questo, possiamo utilizzare il metodo di somiglianza e cercare una soluzione particolare della forma $y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{x}$. Risulta

$$y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{2x} \quad , \qquad y'(x) = 2\alpha\,\mathrm{e}^{2x} \quad , \qquad y''(x) = 4\alpha\,\mathrm{e}^{2x}$$

e sostituendo nell'equazione differenziale completa si ottiene

$$4\alpha\,\mathrm{e}^{2x} - 12\alpha\,\mathrm{e}^{2x} + 5\alpha\,\mathrm{e}^{2x} = 5\,\mathrm{e}^{2x} \qquad \text{ossia} \qquad -3\alpha = 5 \qquad \text{quindi} \qquad \alpha = -\frac{5}{3};$$

pertanto una soluzione particolare è

$$\widetilde{y}(x) = -\frac{5}{3}\,\mathrm{e}^{2x}.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = y_{\text{om}}(x) + \widetilde{y}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{5x} - \frac{5}{3}\,\mathrm{e}^{2x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica che sull'intervallo $(-\pi, \pi]$ è definita da $f(x) = 2\,(|x| - x)$.

a) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Indicata con Sf la serie di Fourier di f, stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $Sf(x)$ converge (puntualmente), precisandone l'eventuale limite.

c) Scrivere il polinomio di Fourier $S_1 f(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ di f di ordine 1.

Svolgimento:

b) La funzione f è continua in ogni punto $x \neq (2k+1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ e presenta un salto finito in $x = (2k+1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$. Quindi, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e risulta

$$Sf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = 2\pi & \text{se } x = (2k+1)\pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -4x\,\mathrm{d}x = \frac{-2}{\pi}\,\left[x^2\right]_{-\pi}^{0} = 2\pi\,.$$

Inoltre, integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -4x\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\,\left[-4x\sin x\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -4\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{-4}{\pi}\,\left[\cos x\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{8}{\pi} \\
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -4x\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\,\left[4x\cos x\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 4\cos x\,\mathrm{d}x = -4 + \frac{1}{\pi}\,\left[4\sin x\right]_{-\pi}^{0} = -4.
\end{aligned}$$

In conclusione, il polinomio di Fourier di f di ordine 1 è

$$S_1 f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x = \pi - \frac{8}{\pi}\,\cos x - 4\,\sin x\,.$$

4. Stabilire se la serie

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n\,\frac{3n^2}{n^3+24}$$

a) converge semplicemente;

b) converge assolutamente.

Svolgimento:

a) Poiché la serie data è a segni alterni, possiamo utilizzare il criterio di Leibniz.

Posto $a_n = \dfrac{3n^2}{n^3+24}$, si hanno le seguenti proprietà:

- $a_n > 0$ definitivamente,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0\,,$
- a_n è definitivamente decrescente, infatti possiamo considerare la funzione definita da $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+24}$ e osservare che $f'(x) = \dfrac{3x\left(48-x^3\right)}{\left(x^3+24\right)^2} \leq 0$ per ogni $x \geq 2\sqrt{6}\,.$

In conclusione, per il criteri di Leibniz, possiamo concludere che la serie data converge semplicemente.

b) Osservato che $a_n = \dfrac{3n^2}{n^3+24} \sim \dfrac{3}{n}$ per $n \to +\infty$, per il Criterio del Confronto Asintotico abbiamo che la serie dei valori assoluti $\sum \left|(-1)^n\,\dfrac{3n^2}{n^3+24}\right| = \sum \dfrac{3n^2}{n^3+24}$ ha lo stesso carattere della serie $\sum \dfrac{3}{n} = 3\sum \dfrac{1}{n}$; poiché la serie armonica $\sum \dfrac{1}{n}$ è divergente, possiamo dire che la serie data non converge assolutamente.

Analisi e Geometria 2

2 maggio 2016

1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che sui vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ della base canonica di $\mathbb{R}^3$ è definita da

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_2) = -5\mathbf{e}_3 \quad , \qquad F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \quad .$$

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica (fissata sia nel domino sia nel codominio).

b) Determinare una base per il nucleo di F e una base per l'immagine di F .
Studiare l'iniettività, la suriettività e l'invertibilità di F .
Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ che è l'intersezione tra il nucleo di F e l'immagine di F .

c) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile H tali che $A = HDH^{-1}$.

Svolgimento:

a) Incolonnando le coordinate delle immagini dei vettori della base abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 1 \end{bmatrix} .$$

b)

- Poiché la matrice A è costruita rispetto la base canonica, il sottospazio $\operatorname{Im} F$ è generato dalle colonne di A e, osservato che il rango di A risulta $\operatorname{rk} A = 2$, una base di $\operatorname{Im} F$ è

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) .$$

Inoltre il nucleo $\ker F$, che per il Teorema di "nullità + rango" ha dimensione 1 , risulta essere lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; quindi una base per $\ker F$ è formata dal vettore

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} .$$

- F è non suriettiva, non iniettiva e non invertibile. Infatti, da quanto scritto sopra ...
- I vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti perché colonne di una matrice di rango 3 :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Questi vettori formano quindi una base del sottospazio vettoriale $\ker F + \operatorname{Im} F$ e di conseguenza $\dim(\ker F + \operatorname{Im} F) = 3$. Per la formula di Grassmann risulta

$$\dim(\ker F \cap \operatorname{Im} F) = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F - \dim (\ker F + \operatorname{Im} F) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

c) Risolvendo l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ (o semplicemente osservando la matrice triangolare A) abbiamo gli autovalori

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{(semplice)} \quad , \qquad \lambda_1 = 1 \quad \text{(doppio)} \; .$$

L'autovalore $\lambda_0 = 0$ è semplice, quindi regolare, e il relativo autospazio è

$$V_0 = \ker F = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} ;$$

L'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica $3 - \text{rk}(A - I) = 3 - 1 = 2$, quindi è regolare; il relativo autospazio è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omegeneo $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che risulta essere

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y = 0 \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poiché tutti gli autovalori sono reali e regolari, la matrice A è diagonalizzabile. A è simile alla matrice diagonale D e una matrice di passaggio è H , dove

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 7y' + 6y = 6\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Svolgimento:

L'equazione omogenea associata è $y'' - 7y' + 6y = 0$. Poiché l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, ossia $(\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$, si ha $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$. Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_{\text{om}}(x) = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{6x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Si tratta ora di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Per fare questo, possiamo utilizzare il metodo di somiglianza e cercare una soluzione particolare della forma $y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x$. Risulta

$$y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{2x} \quad , \qquad y'(x) = 2\alpha\,\mathrm{e}^{2x} \quad , \qquad y''(x) = 4\alpha\,\mathrm{e}^{2x}$$

e sostituendo nell'equazione differenziale completa si ottiene

$$4\alpha\,\mathrm{e}^{2x} - 14\alpha\,\mathrm{e}^{2x} + 6\alpha\,\mathrm{e}^{2x} = 6\,\mathrm{e}^{2x} \qquad \text{ossia} \qquad -4\alpha = 6 \qquad \text{quindi} \qquad \alpha = -\frac{3}{2}\,;$$

pertanto una soluzione particolare è

$$\widetilde{y}(x) = -\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{2x}.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = y_{\text{om}}(x) + \widetilde{y}(x) = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{6x} - \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{2x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica che sull'intervallo $(-\pi, \pi]$ è definita da $f(x) = 3\,(|x| - x)$.

a) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Indicata con Sf la serie di Fourier di f , stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $Sf(x)$ converge (puntualmente), precisandone l'eventuale limite.

c) Scrivere il polinomio di Fourier $S_1 f(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ di f di ordine 1 .

Svolgimento:

b) La funzione f è continua in ogni punto $x \neq (2k+1)\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$ e presenta un salto finito in $x = (2k+1)\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$. Quindi, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e risulta

$$Sf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = 3\pi & \text{se } x = (2k+1)\pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -6x\,\mathrm{d}x = \frac{-3}{\pi}\left[x^2\right]_{-\pi}^{0} = 3\pi\,.$$

Inoltre, integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -6x\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-6x\sin x\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -6\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{-6}{\pi}\left[\cos x\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{12}{\pi} \\
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -6x\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[6x\cos x\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 6\cos x\,\mathrm{d}x = -6 + \frac{1}{\pi}\left[6\sin x\right]_{-\pi}^{0} = -6.
\end{aligned}$$

In conclusione, il polinomio di Fourier di f di ordine 1 è

$$S_1 f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x = \frac{3}{2}\pi - \frac{12}{\pi}\cos x - 6\sin x\,.$$

4. Stabilire se la serie

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\,\frac{2n^2}{n^3+28}$$

a) converge semplicemente;

b) converge assolutamente.

Svolgimento:

a) Poiché la serie data è a segni alterni, possiamo utilizzare il criterio di Leibniz.
Posto $a_n = \dfrac{2n^2}{n^3+28}$, si hanno le seguenti proprietà:

- $a_n > 0$ definitivamente,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,
- a_n è definitivamente decrescente, infatti possiamo considerare la funzione definita da $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^3+28}$ e osservare che $f'(x) = \dfrac{2x\left(56-x^3\right)}{\left(x^3+28\right)^2} \leq 0$ per ogni $x \geq 2\sqrt{7}$.

In conclusione, per il criteri di Leibniz, possiamo concludere che la serie data converge semplicemente.

b) Osservato che $a_n = \dfrac{2n^2}{n^3+28} \sim \dfrac{2}{n}$ per $n\to+\infty$, per il Criterio del Confronto Asintotico abbiamo che la serie dei valori assoluti $\sum\left|(-1)^n\,\dfrac{2n^2}{n^3+28}\right| = \sum\dfrac{2n^2}{n^3+28}$ ha lo stesso carattere della serie $\sum\dfrac{2}{n} = 2\sum\dfrac{1}{n}$; poiché la serie armonica $\sum\dfrac{1}{n}$ è divergente, possiamo dire che la serie data non converge assolutamente.