1. Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$x'' + 4x' + 13x = 13t + 10e^{-t}$$

e risolvere il problema di condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = 0$.

Soluzione

L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4\lambda + 13$ ha le radici complesse $-2 \pm 3i$, quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$x_h(t) = e^{-2t}(A\cos(3t) + B\sin(3t)).$$

Cercando una soluzione $x_1(t)$ dell'equazione $x'' + 4x' + 13x = 13t$ della forma $x_1(t) = at + b$, si trova la soluzione

$$x_1(t) = t - \frac{4}{13}$$

Cercando una soluzione $x_2(t)$ dell'equazione $x'' + 4x' + 13x = 10e^{-t}$ della forma $x_2(t) = ce^{-t}$, si trova la soluzione

$$x_2(t) = e^{-t}$$

Per il principio di sovrapposizione l'integrale generale dell'equazione data è

$$x(t) = x_h(t) + x_1(t) + x_2(t) = e^{-2t}\left(A\cos(3t) + B\sin(3t)\right) + t - \frac{4}{13} + e^{-t}$$

Per trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali, calcoliamo la derivata

$$x'(t) = -2e^{-2t}\left(A\cos(3t) + B\sin(3t)\right) + e^{-2t}\left(-3A\sin(3t) + 3B\cos(3t)\right) + 1 - e^{-t}$$

Sostituendo $t = 0$ troviamo

$$\begin{cases} x(0) = A - \dfrac{4}{13} + 1 \\ \\ x'(0) = -2A + 3B \end{cases}$$

da cui, imponendo $x(0) = x'(0) = 0$, ricaviamo $A = -\dfrac{9}{13}$ e $B = -\dfrac{6}{13}$.

Quindi la soluzione del problema di condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = 0$ è:

$$x(t) = e^{-2t}\left(-\frac{9}{13}\cos(3t) - \frac{6}{13}\sin(3t)\right) + t - \frac{4}{13} + e^{-t}$$

2. Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n + 4n} \quad , \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3n^3 + 5}$$

convergono.

Soluzione

La serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge se $|q| < 1$. Siccome

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{3^n + 4n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{|x|}{3}\right)^n$$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n + 4n}$ converge assolutamente, e quindi anche semplicemente, se $|x| < 3$.
Se invece $|x| \geq 3$, il termine generale $\frac{x^n}{3^n + 4n} \sim \frac{x^n}{3^n}$ non tende a zero per $n \to +\infty$, e quindi la serie non converge.
Si noti che il criterio del confronto vale per le serie a termini positivi: per questo abbiamo dovuto considerare il valore assoluto del termine generale.

Per quanto riguarda la seconda serie, osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin(nx)|}{3n^3 + 5} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n^3 + 5}$$

La serie a secondo membro (che non dipende da x) converge perché $3n^3 + 5 \sim 3n^3$ per $n \to +\infty$, quindi la serie data converge assolutamente per ogni valore di x.

3. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare, e sia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice $\mathbf{A}$ che la rappresenta, nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$.

a) Calcolare le dimensioni dell'immagine e del nucleo di $\mathbf{f}$.

b) Stabilire se il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di $\mathbf{f}$.

Soluzione

Calcoliamo il rango di $\mathbf{A}$ riducendo la matrice $\mathbf{A}$ a scala mediante operazioni elementari sulle righe. Dividiamo la prima riga di $\mathbf{A}$ per due, quindi sottraiamo 3 volte la prima riga dalla seconda, e infine aggiungiamo 4 volte la prima riga alla terza. Otteniamo così

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dove $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ significa che $\mathbf{B}$ è ottenuta da $\mathbf{A}$ mediante operazioni elementari sulle righe). L'ultima matrice sulla destra è a scala con due righe non nulle, quindi il rango di $\mathbf{A}$ è 2, e

$$\dim(\text{Immagine di } \mathbf{f}) = \text{rango}(\mathbf{A}) = 2$$

e

$$\dim(\text{Nucleo di } \mathbf{f}) = \text{numero colonne di } \mathbf{A} - \text{rango}(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2.$$

L'immagine di $\mathbf{f}$ coincide con lo spazio generato dalle colonne della matrice $\mathbf{A}$. Il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è uguale al prodotto della terza colonna di A per lo scalare $-1/3$, quindi appartiene all'immagine.

In alternativa si può procedere così: siccome l'immagine ha dimensione due, la seconda colonna $A^{(2)}$ e la quarta colonna $A^{(4)}$, che sono linearmente indipendenti, formano una base dell'immagine. Il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine se e solo se è combinazione lineare di $A^{(2)}$ e $A^{(4)}$, cioè se e solo se la matrice $\left(A^{(2)}\ A^{(4)}\ \mathbf{v}\right)$ ha rango 2.

Ora

$$\left(A^{(2)}\ A^{(4)}\ \mathbf{v}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango due (per esempio perché ha determinante nullo e le prime due colonne sono linearmente indipendenti), quindi $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine.

4. Sia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 \\ k & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

a) Stabilire per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile.

b) Per i valori di k per cui $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$ e una matrice diagonale simile a $\mathbf{A}$.

Soluzione

Usiamo il fatto che una matrice è diagonalizzabile (nel campo dei numeri reali) se e solo se i suoi autovalori sono tutti reali, e ciascun autovalore è regolare, cioè la sua molteplicità algebrica coincide con la sua molteplicità geometrica, il che è automatico se la molteplicità algebrica è uno (un autovalore semplice è regolare).

Calcolando il polinomio caratteristico troviamo che, indipendentemente da k, la matrice ha due autovalori reali, $\lambda_1 = 3$ con molteplicità algebrica 2, e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 1. Quindi gli autovalori sono tutti reali, λ_2 è semplice, quindi regolare, e la matrice è diagonalizzabile se e solo se anche λ_1 è regolare. Calcoliamo quindi la molteplicità geometrica di λ_1:

$$m.g.(\lambda_1) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 3 - \operatorname{rango}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) =$$
$$= 3 - \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -7 \\ k & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 0 \\ \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Concludiamo che la matrice è diagonalizzabile se e solo se $k = 0$.

Se $k = 0$, la matrice è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo gli autovettori di $\mathbf{A}$.

L'autospazio relativo a $\lambda_1 = 3$ ha equazioni

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tutte e tre le equazioni sono equivalenti all'equazione $z = 0$, quindi l'autospazio relativo a λ_1 è il piano $z = 0$. Come autovettori linearmente indipendenti possiamo scegliere $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'autospazio relativo a $\lambda_2 = 2$ ha equazioni

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

equivalenti a

$$\begin{cases} x - 7z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$$

Scegliendo $z = 1$ troviamo l'autovettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

In conclusione $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{v}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

La matrice $\mathbf{A}$, essendo diagonalizzabile, è simile alla matrice diagonale $\mathbf{D}$ che ha sulla diagonale gli autovalori di $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Più precisamente, se $\mathbf{P}$ è la matrice che ha per colonne i tre autovettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{v}$, si ha

$$\mathbf{P^{-1}AP} = \mathbf{D}.$$