Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Seconda Prova in Itinere** **2–07–2012**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. (a) Dare la definizione di campo conservativo.

   (b) Stabilire se il campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x,y) = \big((1+x^3)x^3y + 2\cos x\big)\,\mathbf{i} + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + \sin y\right)\mathbf{j}$$

   è conservativo dove esso è definito, e, nel caso fosse conservativo, determinarne un potenziale.

   (c) Calcolare il lavoro del campo lungo l'ellisse di equazione $x^2+9y^2 = 1$, percorsa una volta in senso antiorario a partire dal punto $P = (1,0)$.

Soluzione:

(a) ...

(b) Un potenziale è $U(x,y) = \dfrac{x^4y}{4} + \dfrac{x^7y}{7} + 2\sin x - \cos y$.

(c) 0 .

2. Si consideri la funzione $f(x,y) = \log(x^2 - y^2 - 1)$.

   (a) Qual è il dominio di $f(x,y)$? Lo si descriva analiticamente e lo si disegni nel piano cartesiano.
   (b) La funzione $f(x,y)$ è differenziabile nel suo dominio? Giustificare la risposta.
   (c) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie $z = f(x,y)$ nel punto $(2, 1, f(2, 1))$.
   (d) La curva di livello $f(x,y) = f(2,1)$ è una curva regolare in un intorno di $(2,1)$? In caso affermativo, scrivere l'equazione della retta tangente a tale curva in $(2,1)$.

Soluzione:

(a) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - 1 > 0\right\}$, ...

(b) ...

(c) $2x - y - z - 3 + \log 2 = 0$.

(d) $2x - y - 3 = 0$.

3. (a) Enunciare il teorema del rotore nello spazio.
   (b) Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + 2x^3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, e sia S la porzione della superficie di equazione $z = 2 - x^6 - y^6$ che si proietta nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, orientata verso l'alto. Calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso S in due modi distinti:
      i. utilizzando direttamente la definizione di flusso;
      ii. utilizzando il teorema del rotore.

Soluzione:

(a) ...

(b) i. Il rotore del campo $\mathbf{F}$ *è*

$$\text{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & 2x^3 & 6 \end{bmatrix} = (6x^2-1)\mathbf{k}.$$

La superficie S *è data in forma cartesiana* $z = g(x,y) = 2 - x^6 - y^6$, *con* $x^2+y^2 \leq 1$, *quindi, rispettando l'orientazione "verso l'alto", si ha*

$$\mathbf{n}\, dS = \left(-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\, dy = \left(6x^5\mathbf{i} + 6y^5\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\, dy.$$

Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned}
\Phi_S(\text{rot}\mathbf{F}) &= \iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (6x^2-1)\mathbf{k} \cdot \left(6x^5\mathbf{i} + 6y^5\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\, dy \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (6x^2-1)\, dx\, dy \\
&= 6\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho^3 \cos^2\vartheta\, d\rho\, d\vartheta - \iint_{x^2+y^2\leq 1} dx\, dy \\
&= 6\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\, d\vartheta - \pi \\
&= 6\frac{1}{4}\pi - \pi \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

ii. La curva ∂S *ha una parametrizzazione regolare* $\mathbf{r}$ *con derivata* $\mathbf{r}'$ *:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \left(\cos t, \sin t, 2 - \cos^6 t - \sin^6 t\right); \\
\mathbf{r}'(t) &= \left(-\sin t, \cos t, 6\cos^5 t \sin t - 6\sin^5 t \cos t\right).
\end{aligned}$$

Poiché S *è orientata "verso l'alto", il bordo* ∂S *è perscorso in "senso antiorario", e si ha:*

$$\begin{aligned}
W_{\partial S}(\mathbf{F}) &= \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}\, ds \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left((\sin t)\mathbf{i} + (2\cos^3 t)\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\right) \cdot \left((-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (6\cos^5 t \sin t - 6\sin^5 t \cos t)\mathbf{k}\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t + 2\cos^4 t + 36\cos^5 t \sin t - 36\sin^5 t \cos t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t + 2\cos^4 t\right) dt + 0 \\
&= \dots \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Seconda Prova in Itinere** **2–07–2012**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. (a) Dare la definizione di campo conservativo.

   (b) Stabilire se il campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x,y) = \left(\frac{y^3}{3} + \frac{y^8}{8} + 3\sin x\right)\mathbf{i} + \big(x(1+y^5)y^2 - \cos y\big)\,\mathbf{j}$$

   è conservativo dove esso è definito, e, nel caso fosse conservativo, determinarne un potenziale.

   (c) Calcolare il lavoro del campo lungo l'ellisse di equazione $x^2+9y^2=1$, percorsa una volta in senso antiorario a partire dal punto $P=(1,0)$.

Soluzione:

(a) ...

(b) Un potenziale è $U(x,y) = \dfrac{xy^3}{3} + \dfrac{xy^8}{8} - 3\cos x - \sin y$.

(c) 0

2. Si consideri la funzione $f(x,y) = \log(y^2 - x^2 - 1)$.

   (a) Qual è il dominio di $f(x,y)$? Lo si descriva analiticamente e lo si disegni nel piano cartesiano.

   (b) La funzione $f(x,y)$ è differenziabile nel suo dominio? Giustificare la risposta.

   (c) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie $z = f(x,y)$ nel punto $(1, 2, f(1,2))$.

   (d) La curva di livello $f(x,y) = f(1,2)$ è una curva regolare in un intorno di $(1,2)$? In caso affermativo, scrivere l'equazione della retta tangente a tale curva in $(1,2)$.

Soluzione:

(a) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 - 1 > 0\right\}$, ...

(b) ...

(c) $x - 2y + z + 3 - \log 2 = 0$.

(d) $x - 2y + 3 = 0$.

3. (a) Enunciare il teorema del rotore nello spazio.
   (b) Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = -y^3\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, e sia S la porzione della superficie di equazione $z = 4 - x^6 - y^6$ che si proietta nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, orientata verso l'alto. Calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso S in due modi distinti:
      i. utilizzando direttamente la definizione di flusso;
      ii. utilizzando il teorema del rotore.

Soluzione:

(a) ...

(b) *i. Il rotore del campo* $\mathbf{F}$ *è*

$$\text{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y^3 & 2x & 4 \end{bmatrix} = (2+3y^2)\mathbf{k}.$$

La superficie S *è data in forma cartesiana* $z = g(x,y) = 4 - x^6 - y^6$, *con* $x^2+y^2 \leq 1$, *quindi, rispettando l'orientazione "verso l'alto", si ha*

$$\mathbf{n}\,dS = \left(-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\,dy = \left(6x^5\mathbf{i} + 6y^5\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\,dy.$$

Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned}
\Phi_S(\text{rot}\mathbf{F}) &= \iint_S \text{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (2+3y^2)\mathbf{k}\cdot\left(6x^5\mathbf{i}+6y^5\mathbf{j}+\mathbf{k}\right) dx\,dy \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (2+3y^2)\,dx\,dy \\
&= 2\iint_{x^2+y^2\leq 1} dx\,dy + 3\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho^3\sin^2\vartheta\,d\rho\,d\vartheta \\
&= 2\pi + 3\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\,d\vartheta \\
&= 2\pi + 3\frac{1}{4}\pi \\
&= \frac{11}{4}\pi
\end{aligned}$$

ii. La curva ∂S *ha una parametrizzazione regolare* $\mathbf{r}$ *con derivata* $\mathbf{r}'$ *:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \left(\cos t, \sin t, 4 - \cos^6 t - \sin^6 t\right); \\
\mathbf{r}'(t) &= \left(-\sin t, \cos t, 6\cos^5 t\sin t - 6\sin^5 t\cos t\right).
\end{aligned}$$

Poiché S *è orientata "verso l'alto", il bordo* ∂S *è perscorso in "senso antiorario", e si ha:*

$$\begin{aligned}
W_{\partial S}(\mathbf{F}) &= \oint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{t}\,ds \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left((-\sin^3 t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\right)\cdot\left((-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (6\cos^5 t\sin t - 6\sin^5 t\cos t)\mathbf{k}\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^4 t + 2\cos^2 t + 24\cos^5 t\sin t - 24\sin^5 t\cos t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^4 t + 2\cos^2 t\right) dt + 0 \\
&= \ldots \\
&= \frac{11}{4}\pi
\end{aligned}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Seconda Prova in Itinere** **2–07–2012**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. (a) Dare la definizione di campo conservativo.

   (b) Stabilire se il campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x,y) = \big((1+x)x^4 y + 4\cos x\big)\,\mathbf{i} + \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \cos y\right)\mathbf{j}$$

   è conservativo dove esso è definito, e, nel caso fosse conservativo, determinarne un potenziale.

   (c) Calcolare il lavoro del campo lungo l'ellisse di equazione $x^2+9y^2 = 1$, percorsa una volta in senso antiorario a partire dal punto $P = (1,0)$.

Soluzione:

(a) -

(b) Un potenziale è $U(x,y) = \dfrac{x^5 y}{5} + \dfrac{x^6 y}{6} + 4\sin x + \sin y$.

(c) 0

2. Si consideri la funzione $f(x,y) = \log(1 - x^2 + y^2)$.

   (a) Qual è il dominio di $f(x,y)$? Lo si descriva analiticamente e lo si disegni nel piano cartesiano.

   (b) La funzione $f(x,y)$ è differenziabile nel suo dominio? Giustificare la risposta.

   (c) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie $z = f(x,y)$ nel punto $(1, 2, f(1,2))$.

   (d) La curva di livello $f(x,y) = f(1,2)$ è una curva regolare in un intorno di $(1,2)$? In caso affermativo, scrivere l'equazione della retta tangente a tale curva in $(1,2)$.

Soluzione:

(a) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 + y^2 > 0\right\}$, ...

(b) ...

(c) $x - 2y + 2z + 3 - 4\log 2 = 0$.

(d) $x - 2y + 3 = 0$.

3. (a) Enunciare il teorema del rotore nello spazio.
   (b) Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = -2y^3\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, e sia S la porzione della superficie di equazione $z = 5 - x^6 - y^6$ che si proietta nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, orientata verso l'alto. Calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso S in due modi distinti:
      i. utilizzando direttamente la definizione di flusso;
      ii. utilizzando il teorema del rotore.

Soluzione:

(a) ...

(b) *i. Il rotore del campo* $\mathbf{F}$ *è*

$$\text{rot}\mathbf{F}(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -2y^3 & x & 5 \end{bmatrix} = (1 + 6y^2)\mathbf{k}.$$

La superficie S *è data in forma cartesiana* $z = g(x, y) = 5 - x^6 - y^6$, *con* $x^2 + y^2 \leq 1$, *quindi, rispettando l'orientazione "verso l'alto", si ha*

$$\mathbf{n}\, dS = \left(-\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\, dy = \left(6x^5\mathbf{i} + 6y^5\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\, dy.$$

Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned} \Phi_S(\text{rot}\mathbf{F}) &= \iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 + 6y^2)\mathbf{k} \cdot \left(6x^5\mathbf{i} + 6y^5\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\, dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 + 6y^2)\, dx\, dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx\, dy + 6 \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho^3 \sin^2 \vartheta\, d\rho\, d\vartheta \\ &= \pi + 6 \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta\, d\vartheta \\ &= \pi + 6\frac{1}{4}\pi \\ &= \frac{5}{2}\pi \end{aligned}$$

ii. La curva ∂S *ha una parametrizzazione regolare* $\mathbf{r}$ *con derivata* $\mathbf{r}'$ *:*

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \left(\cos t, \sin t, 5 - \cos^6 t - \sin^6 t\right); \\ \mathbf{r}'(t) &= \left(-\sin t, \cos t, 6\cos^5 t \sin t - 6\sin^5 t \cos t\right). \end{aligned}$$

Poiché S *è orientata "verso l'alto", il bordo* ∂S *è perscorso in "senso antiorario", e si ha:*

$$\begin{aligned} W_{\partial S}(\mathbf{F}) &= \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}\, ds \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left((-2\sin^3 t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\right) \cdot \left((-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (6\cos^5 t \sin t - 6\sin^5 t \cos t)\mathbf{k}\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2\sin^4 t + \cos^2 t + 30\cos^5 t \sin t - 30\sin^5 t \cos t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2\sin^4 t + \cos^2 t\right) dt + 0 \\ &= \dots \\ &= \frac{5}{2}\pi \end{aligned}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 Docente:		Seconda Prova in Itinere 2–07–2012
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. (a) Dare la definizione di campo conservativo.

   (b) Stabilire se il campo vettoriale

   $$\mathbf{v}(x,y) = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^9}{9} + 5\sin x\right)\mathbf{i} + \left(x(1+y^7)y - \sin y\right)\mathbf{j}$$

   è conservativo dove esso è definito, e, nel caso fosse conservativo, determinarne un potenziale.

   (c) Calcolare il lavoro del campo lungo l'ellisse di equazione $x^2+9y^2 = 1$, percorsa una volta in senso antiorario a partire dal punto $P = (1,0)$.

Soluzione:

(a) -

(b) Un potenziale è $U(x,y) = \dfrac{xy^2}{2} + \dfrac{xy^9}{9} - 5\cos x + \cos y$.

(c) 0

2. Si consideri la funzione $f(x, y) = \log(1 + x^2 - y^2)$.

   (a) Qual è il dominio di $f(x, y)$? Lo si descriva analiticamente e lo si disegni nel piano cartesiano.

   (b) La funzione $f(x, y)$ è differenziabile nel suo dominio? Giustificare la risposta.

   (c) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie $z = f(x, y)$ nel punto $(2, 1, f(2, 1))$.

   (d) La curva di livello $f(x, y) = f(2, 1)$ è una curva regolare in un intorno di $(2, 1)$? In caso affermativo, scrivere l'equazione della retta tangente a tale curva in $(2, 1)$.

Soluzione:

(a) $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x^2 - y^2 > 0\right\}$, ...

(b) ...

(c) $2x - y - 2z - 3 + 4\log 2 = 0$.

(d) $2x - y - 3 = 0$.

3. (a) Enunciare il teorema del rotore nello spazio.
   (b) Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = 2y\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, e sia S la porzione della superficie di equazione $z = 3 - x^6 - y^6$ che si proietta nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, orientata verso l'alto. Calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso S in due modi distinti:
      i. utilizzando direttamente la definizione di flusso;
      ii. utilizzando il teorema del rotore.

Soluzione:

(a) ...

(b) *i. Il rotore del campo* $\mathbf{F}$ *è*

$$\mathrm{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2y & x^3 & 3 \end{bmatrix} = (3x^2 - 2)\mathbf{k}.$$

La superficie S *è data in forma cartesiana* $z = g(x,y) = 3 - x^6 - y^6$, *con* $x^2 + y^2 \le 1$, *quindi, rispettando l'orientazione "verso l'alto", si ha*

$$\mathbf{n}\,dS = \left(-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)dx\,dy = \left(6x^5\mathbf{i} + 6y^5\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)dx\,dy.$$

Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned}
\Phi_S(\mathrm{rot}\mathbf{F}) &= \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} (3x^2-2)\mathbf{k}\cdot\left(6x^5\mathbf{i} + 6y^5\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)dx\,dy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} (3x^2-2)\,dx\,dy \\
&= 3\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho^3\cos^2\vartheta\,d\rho\,d\vartheta - 2\iint_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy \\
&= 3\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\,d\vartheta - 2\pi \\
&= 3\frac{1}{4}\pi - 2\pi \\
&= -\frac{5}{4}\pi
\end{aligned}$$

ii. La curva ∂S *ha una parametrizzazione regolare* $\mathbf{r}$ *con derivata* $\mathbf{r}'$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \left(\cos t, \sin t, 3 - \cos^6 t - \sin^6 t\right); \\
\mathbf{r}'(t) &= \left(-\sin t, \cos t, 6\cos^5 t\sin t - 6\sin^5 t\cos t\right).
\end{aligned}$$

Poiché S *è orientata "verso l'alto", il bordo* ∂S *è perscorso in "senso antiorario", e si ha:*

$$\begin{aligned}
W_{\partial S}(\mathbf{F}) &= \oint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{t}\,ds \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left((2\sin t)\mathbf{i} + (\cos^3 t)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\right)\cdot\left((-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (6\cos^5 t\sin t - 6\sin^5 t\cos t)\mathbf{k}\right)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-2\sin^2 t + \cos^4 t + 18\cos^5 t\sin t - 18\sin^5 t\cos t\right)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-2\sin^2 t + \cos^4 t\right)dt + 0 \\
&= \ldots \\
&= -\frac{5}{4}\pi
\end{aligned}$$