

1. Sia  $f(x, y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$ . Determinare gli estremi assoluti di  $f$  nel triangolo chiuso di vertici  $(0, 0)$ ,  $(a, a)$ ,  $(0, 2a)$  ( $a \geq 1$ ).

**Soluzione** Poniamo  $O = (0, 0)$ ,  $A = (a, a)$ ,  $B = (0, 2a)$ . Il triangolo giace nel primo quadrante del piano cartesiano, e  $f(x, y) > 0$  per ogni  $(x, y)$  del primo quadrante, con l'eccezione dell'origine: nell'origine la funzione vale 0, per cui l'origine è l'unico punto di minimo assoluto di  $f(x, y)$  nel triangolo, e 0 è il minimo assoluto della funzione nel triangolo. Per determinare il massimo assoluto, cerchiamo i punti di massimo della funzione sulla frontiera del triangolo e all'interno del triangolo

Il lato  $OA$  del triangolo giace sulla bisettrice del primo quadrante  $y = x$ , e i suoi punti hanno coordinate  $(x, x)$  al variare di  $x$  tra 0 e  $a$ . La funzione  $f$  ristretta al segmento  $OA$  è  $g(x) = f(x, x) = 2xe^{-2x^2}$ , la cui derivata è

$$g'(x) = 2e^{-2x^2}(1 - 4x^2)$$

Nell'intervallo  $[0, a]$  la derivata  $g'(x)$  è positiva se  $0 \leq x < 1/2$ , nulla se  $x = 1/2$ , e negativa per  $x > 1/2$ . Quindi il punto  $P(1/2, 1/2)$  è l'unico punto di massimo vincolato di  $f(x, y)$  sul segmento  $OA$ . Il valore della funzione in  $P$  è

$$f(1/2, 1/2) = e^{-1/4-1/4} = e^{-1/2}$$

Il lato  $OB$  del triangolo giace sull'asse  $y$ , e i suoi punti hanno coordinate  $(0, y)$  al variare di  $y$  tra 0 e  $2a$ . La funzione  $f$  ristretta al segmento  $OB$  è  $h(y) = f(0, y) = ye^{-y^2}$ , la cui derivata è

$$h'(y) = e^{-y^2}(1 - 2y^2)$$

Da questo segue che sull'asse  $y$ , la funzione ha un unico punto di massimo vincolato  $Q = (0, 1/\sqrt{2})$ . Il valore della funzione in  $Q$  è

$$f(Q) = f(0, 1/\sqrt{2}) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} < e^{-1/2} = f(P).$$

Il lato  $AB$  del triangolo giace sulla retta di equazione  $x + y = 2a$ , e i suoi punti hanno coordinate  $(x, 2a - x)$  al variare di  $x$  tra 0 e  $a$ . La funzione  $f$  ristretta al segmento  $AB$  è

$$k(x) = f(x, 2a - x) = 2ae^{-x^2-(2a-x)^2} = 2ae^{-2x^2+4ax-4a^2},$$

la cui derivata è

$$k'(x) = 2a(-4x + 4a)e^{-2x^2+4ax-4a^2}$$

Nell'intervallo  $(0, a)$  la derivata  $k'(x)$  è positiva, quindi sul segmento  $AB$  la funzione  $k(x)$  ha il suo massimo nel vertice  $A = (a, a)$ . Siccome  $A$  appartiene anche al segmento  $OA$  e  $P$  è l'unico punto di massimo di  $f$  su  $OA$ , concludiamo che  $P$  è l'unico punto di massimo di  $f$  sul bordo del triangolo.

Cerchiamo eventuali punti critici all'interno del triangolo: imponendo

$$\begin{cases} 0 = f_x(x, y) = e^{-x^2-y^2}(1 - 2x(x+y)) \\ 0 = f_y(x, y) = e^{-x^2-y^2}(1 - 2y(x+y)) \end{cases}$$

troviamo

$$\begin{cases} x(x+y) = y(x+y) \\ 1 = 2x(x+y) \end{cases}$$

All'interno del triangolo si ha  $x + y > 0$ , per cui dalla prima equazione si ricava  $x = y$ , e poi dalla seconda  $1 = 4x^2$ , quindi  $x = 1/2$  (perché  $x > 0$  all'interno del triangolo) e  $y = 1/2$ : l'unico punto critico di  $f(x, y)$  nel primo quadrante è il punto  $P = (1/2, 1/2)$  che si trova sul bordo del triangolo. Quindi la funzione non ha punti critici all'interno del triangolo, e assume il suo valore massimo assoluto sul bordo del triangolo, necessariamente nel punto  $P$ . Il massimo assoluto della funzione sul triangolo è perciò  $f(P) = e^{-1/2}$ .

2. Nel piano sia  $\gamma$  il bordo, orientato in senso antiorario, del parallelogramma di vertici  $(2/3, 0)$ ,  $(5/3, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ . Si calcoli il lavoro del campo vettoriale  $\vec{F}(x, y) = \frac{y}{x^2} \vec{i} + \frac{3}{x} \vec{j}$  lungo  $\gamma$ . Suggerimento: utilizzare il teorema di Gauss-Green per trasformare l'integrale di linea in un integrale doppio.

**Soluzione** Il parallelogramma  $D$  in questione è un dominio  $x$ -semplice (disegnarlo!), ed è delimitato dalle rette di equazione  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = 3x - 2$  e  $y = 3x - 5$ :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \frac{y+2}{3} \leq x \leq \frac{y+5}{3} \right\}$$

Per il teorema di Gauss Green

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left( -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx dy.$$

Ora

$$\iint_D \frac{1}{x^2} dx dy = \int_0^1 \left( \int_{\frac{y+2}{3}}^{\frac{y+5}{3}} \frac{1}{x^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left( \frac{3}{y+2} - \frac{3}{y+5} \right) dy = 3 \log(5/4)$$

Perciò

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -4 \iint_D \frac{1}{x^2} dx dy = -12 \log(5/4)$$

3. Nel piano sia  $\gamma$  il bordo, orientato in senso antiorario, del parallelogramma di vertici  $(1, 1), (2, 1), (1/2, 2), (3/2, 2)$ . Si calcoli il lavoro del campo vettoriale  $\vec{F}(x, y) = \frac{y}{x^2} \vec{i} + \frac{4}{x} \vec{j}$  lungo  $\gamma$ . Suggerimento: utilizzare il teorema di Gauss-Green per trasformare l'integrale di linea in un integrale doppio.

**Soluzione** Il parallelogramma  $D$  in questione è un dominio  $x$ -semplice (disegnarlo!), ed è delimitato dalle rette di equazione  $y = 1$ ,  $y = 2$ ,  $y = 3 - 2x$  e  $y = 5 - 2x$ :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, \frac{3-y}{2} \leq x \leq \frac{5-y}{2} \right\}$$

Per il teorema di Gauss Green

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left( -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx dy.$$

Ora

$$\iint_D \frac{1}{x^2} dx dy = \int_1^2 \left( \int_{\frac{3-y}{2}}^{\frac{5-y}{2}} \frac{1}{x^2} dx \right) dy = \int_1^2 \left( \frac{2}{3-y} - \frac{2}{5-y} \right) dy = 2 \log(3/2)$$

Perciò

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -5 \iint_D \frac{1}{x^2} dx dy = -10 \log(3/2)$$

4. Nel piano sia  $\gamma$  il bordo, orientato in senso antiorario, del parallelogramma di vertici  $(0, 2/3), (0, 5/3), (1, 1), (1, 2)$ . Si calcoli il lavoro del campo vettoriale  $\vec{F}(x, y) = \frac{1}{y} \vec{i} + \frac{5x}{y^2} \vec{j}$  lungo  $\gamma$ . Suggerimento: utilizzare il teorema di Gauss-Green per trasformare l'integrale di linea in un integrale doppio.

**Soluzione** Il parallelogramma  $D$  in questione è un dominio  $y$ -semplice (disegnarlo!), ed è delimitato dalle rette di equazione  $x = 0, x = 1, y = \frac{x+2}{3}$  e  $y = \frac{x+5}{3}$ :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \frac{x+2}{3} \leq y \leq \frac{x+5}{3} \right\}$$

Per il teorema di Gauss Green

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left( \frac{5}{y^2} + \frac{1}{y^2} \right) dx dy.$$

Ora

$$\iint_D \frac{1}{y^2} dx dy = \int_0^1 \left( \int_{\frac{x+2}{3}}^{\frac{x+5}{3}} \frac{1}{y^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{3}{x+2} - \frac{3}{x+5} \right) dx = 3 \log(5/4)$$

Perciò

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 6 \iint_D \frac{1}{y^2} dx dy = 18 \log(5/4)$$

5. Nel piano sia  $\gamma$  il bordo, orientato in senso antiorario, del parallelogramma di vertici  $(1, 1), (1, 2), (2, 1/2), (2, 3/2)$ . Si calcoli il lavoro del campo vettoriale  $\vec{F}(x, y) = \frac{1}{y} \vec{i} + \frac{2x}{y^2} \vec{j}$  lungo  $\gamma$ . Suggerimento: utilizzare il teorema di Gauss-Green per trasformare l'integrale di linea in un integrale doppio.

**Soluzione** Il parallelogramma  $D$  in questione è un dominio  $y$ -semplice (disegnarlo!), ed è delimitato dalle rette di equazione  $x = 1, x = 2, y = \frac{3-x}{2}$  e  $y = \frac{5-x}{2}$ :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \frac{3-x}{2} \leq y \leq \frac{5-x}{2} \right\}$$

Per il teorema di Gauss Green

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left( \frac{2}{y^2} + \frac{1}{y^2} \right) dydx.$$

Ora

$$\iint_D \frac{1}{y^2} dx dy = \int_1^2 \left( \int_{\frac{3-x}{2}}^{\frac{5-x}{2}} \frac{1}{y^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left( \frac{2}{3-x} - \frac{2}{5-x} \right) dx = 2 \log(3/2)$$

Perciò

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3 \iint_D \frac{1}{y^2} dx dy = 6 \log(3/2)$$

6. Si consideri campo vettoriale  $\vec{F}(x, y) = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} \vec{i} + \left( \frac{e^y}{1 + x^2} + 1 \right) \vec{j}$

- a) Il campo vettoriale  $\vec{F}(x, y)$  è conservativo in  $\mathbf{R}^2$ ? Motivare la risposta. Se lo è, se ne trovi un potenziale.
- b) Si calcoli il lavoro di  $\vec{F}(x, y)$  lungo l'arco di curva  $x^2 + 9y^2 = 1$  compreso nel secondo quadrante e percorso in verso antiorario.

### Soluzione

a) Il campo è irrotazionale in  $\mathbb{R}^2$  che è semplicemente connesso, dunque ammette potenziale in  $\mathbb{R}^2$ .

Il potenziale è una funzione  $U(x, y)$  tale che  $U_x = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}$ ,  $U_y = \frac{e^y}{1 + x^2} + 1$ ; si ha che:  $U(x, y) = \int \left( \frac{e^y}{1 + x^2} + 1 \right) dy + g(x) = \frac{e^y}{1 + x^2} + y + g(x)$ ; derivando rispetto a  $x$  si trova che  $U_x = \frac{-2xe^y}{(1 + x^2)^2} + g'(x) = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}$ , da cui  $g(x) = -\frac{1}{1 + x^2}$ . Un potenziale è  $U(x, y) = \frac{e^y}{1 + x^2} + y - \frac{1}{1 + x^2}$ .

b) L'arco di curva è un'ellisse con punto iniziale  $A = \left( 0, \frac{1}{3} \right)$  e punto finale  $B = (-1, 0)$ . Il lavoro è pari a  $U(B) - U(A) = \frac{2}{3} - \sqrt[3]{e}$ .

7. Si consideri il campo vettoriale  $\vec{F}(x, y) = \frac{e^{-x}}{1+y^2} \vec{i} + \frac{2y(1+e^{-x})}{(1+y^2)^2} \vec{j}$ .

- a) Il campo vettoriale  $\vec{F}(x, y)$  è conservativo in  $\mathbf{R}^2$ ? Motivare la risposta. Se lo è, se ne trovi un potenziale.
- b) Si calcoli il lavoro di  $\vec{F}(x, y)$  lungo l'arco di curva  $9x^2 + y^2 = 1$  compreso nel quarto quadrante e percorso in verso antiorario.

### Soluzione

a) Il campo è irrotazionale in  $\mathbf{R}^2$  che è semplicemente connesso, dunque ammette potenziale in  $\mathbf{R}^2$ .

Il potenziale è una funzione  $U(x, y)$  tale che  $U_x = \frac{e^{-x}}{1+y^2}$ ,  $U_y = \frac{2y(1+e^{-x})}{(1+y^2)^2}$ ; si ha che:  $U(x, y) = \int \frac{e^{-x}}{1+y^2} dx + g(y) = -\frac{e^{-x}}{1+y^2} + g(y)$ ; derivando rispetto a  $y$  si trova che  $U_y = \frac{2ye^{-x}}{(1+y^2)^2} + g'(y) = \frac{2y(1+e^{-x})}{(1+y^2)^2}$ ,

da cui  $g(y) = -\frac{1}{1+y^2}$ . Un potenziale è  $U(x, y) = -\frac{e^{-x}}{1+y^2} - \frac{1}{1+y^2}$ .

b) L'arco di curva è un'ellisse con punto iniziale  $A = (-1, 0)$  e punto finale  $B = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ . Il lavoro è pari a  $U(B) - U(A) = -\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ .

8. Si consideri il campo vettoriale  $\vec{F}(x, y) = \frac{2x(1 + e^{-y})}{(1 + x^2)^2} \vec{i} + \frac{e^{-y}}{1 + x^2} \vec{j}$

- a) Il campo vettoriale  $\vec{F}(x, y)$  è conservativo in  $\mathbf{R}^2$ ? Motivare la risposta. Se lo è, se ne trovi un potenziale.
- b) Si calcoli il lavoro di  $\vec{F}(x, y)$  lungo l'arco di curva  $x^2 + 4y^2 = 4$  compreso nel terzo quadrante e percorso in verso orario.

### Soluzione

a) Il campo è irrotazionale in  $\mathbb{R}^2$  che è semplicemente connesso, dunque ammette potenziale in  $\mathbb{R}^2$ .

Il potenziale è una funzione  $U(x, y)$  tale che  $U_x = \frac{2x(1 + e^{-y})}{(1 + x^2)^2}$ ,  $U_y = \frac{e^{-y}}{1 + x^2}$ ; si ha che:  $U(x, y) = \int \frac{e^{-y}}{1 + x^2} dy + g(x) = -\frac{e^{-y}}{1 + x^2} + g(x)$ ; derivando rispetto a  $x$  si trova che  $U_x = \frac{2xe^{-y}}{(1 + x^2)^2} + g'(x) = \frac{e^{-y}}{1 + x^2}$ ,

da cui  $g(x) = -\frac{1}{1 + x^2}$ . Un potenziale è  $U(x, y) = -\frac{e^{-y}}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2}$ .

b) L'arco di curva è un'ellisse con punto iniziale  $A = (0, -1)$  e punto finale  $B = (-2, 0)$ . Il lavoro è pari a  $U(B) - U(A) = e + \frac{3}{5}$ .



9. Si consideri il campo vettoriale  $\vec{F}(x, y) = \left( \frac{e^x}{1+y^2} + 1 \right) \vec{i} + \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2} \vec{j}$ .

- a) Il campo vettoriale  $\vec{F}(x, y)$  è conservativo in  $\mathbf{R}^2$ ? Motivare la risposta. Se lo è, se ne trovi un potenziale.
- b) Si calcoli il lavoro di  $\vec{F}(x, y)$  lungo l'arco di curva  $4x^2 + y^2 = 4$  compreso nel primo quadrante e percorso in verso orario.

### Soluzione

a) Il campo è irrotazionale in  $\mathbf{R}^2$  che è semplicemente connesso, dunque ammette potenziale in  $\mathbf{R}^2$ .

Il potenziale è una funzione  $U(x, y)$  tale che  $U_x = \frac{e^x}{1+y^2} + 1$ ,  $U_y = \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}$ ; si ha che:  $U(x, y) = \int \left( \frac{e^x}{1+y^2} + 1 \right) dx + g(y) = \frac{e^x}{1+y^2} + x + g(y)$ ; derivando rispetto a  $y$  si trova che  $U_y = -\frac{2ye^x}{(1+y^2)^2} + g'(y) = \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}$ , da cui  $g(y) = -\frac{1}{1+y^2}$ . Un potenziale è  $U(x, y) = \frac{e^x}{1+y^2} + x - \frac{1}{1+y^2}$ .

b) L'arco di curva è un'ellisse con punto iniziale  $A = (0, 2)$  e punto finale  $B = (1, 0)$ . Il lavoro è pari a  $U(B) - U(A) = e$ .