POLITECNICO DI MILANO – Facoltà di Ingegneria Industriale

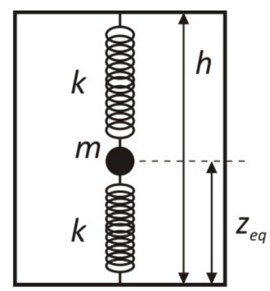
Fondamenti di Fisica Sperimentale, a.a. 2011-12

I^a prova in itinere, 3 maggio 2012

Giustificare le risposte e scrivere in modo chiaro e leggibile. Sostituire i valori numerici solo alla fine, dopo aver ricavato le espressioni letterali. Scrivere in stampatello nome, cognome, matricola e firmare ogni foglio.

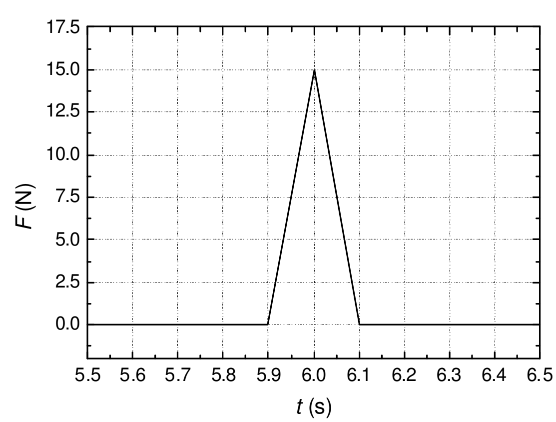
1. Un blocco di massa m = 1 kg scivola lungo un piano inclinato di un angolo θ = 30° rispetto all'orizzontale e di altezza, nel punto più alto, pari a h = 2 m. Il piano è scabro con coefficiente di attrito dinamico μ_d = 0.1. Considerando che il corpo parte con una velocità iniziale di modulo v_0 = 1 m/s dal punto più in alto del piano e arriva alla base dello stesso, calcolare:
a) il lavoro L_p compiuto dalla forza peso;
b) il lavoro L_{tot} compiuto da tutte le forze agenti sul corpo;
c) il modulo della velocità v_f con la quale il blocco arriva alla base del piano inclinato;
d) il tempo impiegato dal corpo per arrivare alla base del piano inclinato.

2. Un corpo di massa m = 1 kg è vincolato a due molle ideali disposte lungo la verticale e agganciate alla base e al soffitto, rispettivamente, della cabina di un ascensore, come rappresentato in figura. Entrambe le molle hanno le medesime costante elastica k = 20 N/m e lunghezza a riposo ℓ_0 = 1 m. La cabina dell'ascensore è alta h = 3 m.
Si supponga che l'ascensore si stia muovendo verso l'alto. Si calcoli la posizione verticale di equilibrio z_{eq} (distanza rispetto alla base dell'ascensore) del corpo nei casi seguenti:
a) l'ascensore si muove con velocità costante;
b) l'ascensore è in fase di accelerazione, con a = 3.5 m/s^2 costante, verso l'alto.
Infine:
c) si calcoli la costante elastica equivalente del sistema.

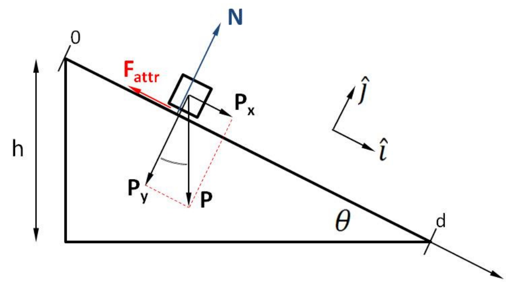


3. Si consideri una sferetta di massa m = 100 g, appesa a un filo sottile di lunghezza L = 50 cm, inestensibile e di massa trascurabile.
a) Si scriva l'espressione dell'equazione del moto del pendolo e se ne riporti (senza necessariamente ricavarla) la soluzione generale nell'ipotesi di piccole oscillazioni, spiegando il significato dei diversi termini.
b) Si determini il periodo delle piccole oscillazioni.
c) Si dica, giustificando la risposta, in quale punto la tensione del filo raggiunge il valore massimo.

4. Il grafico accanto si riferisce all'esperimento durante il quale un carrello urta dei respingenti fissati alla guida. In esso è indicato l'andamento temporale della forza applicata ai respingenti. Dopo aver dimostrato il teorema dell'impulso, calcolare la velocità del carrello prima e dopo l'urto nel caso in cui l'urto sia perfettamente elastico oppure totalmente anelastico



1.



a) La forza peso è una forza conservativa, alla quale cioè può essere associata una energia potenziale, $U_p = mgh$ + costante, con h altezza del blocco rispetto alla base del piano, dove possiamo porre energia potenziale nulla. Si può quindi concludere che:

$$L_\mathrm{p} = -\Delta U_\mathrm{p} = -(0 - mgh) = 19.62 \text{ J}$$

b) Sul corpo agiscono le forze mostrate in figura: la forza peso **P**, la reazione vincolare del piano **N** e la forza di attrito $\mathbf{F}_{\text{attr}}$. Il lavoro della forza peso è stato calcolato al punto precedente. Il lavoro della reazione vincolare del piano è nullo, in quanto la forza è sempre perpendicolare alla direzione del moto del blocco. Il lavoro della forza di attrito può essere calcolato tramite la:

$$L_{\text{attr}} = \int_0^d F_{\text{attr}}\, dx = -\int_0^d \mu_d mg\cos(\theta) dx = -\frac{\mu_\mathrm{d} mgh}{\mathrm{tg}(\theta)} = \text{-3.39 J},$$

nella quale $d = h/\sin(\theta)$ e $|\mathbf{N}| = mg\cos(\theta)$.

Il lavoro complessivo delle forze in gioco è quindi: $L_{\text{tot}} = L_\mathrm{p} + L_{\text{attr}} = 16.23$ J.

c) Il lavoro delle forze agenti sul blocco ne modifica l'energia cinetica:

$$L_{\text{tot}} = \Delta E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2, \text{ quindi } v_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{2L_{\text{tot}}}{m} + v_0^2} = 5.78 \text{ m/s}.$$

d) Il tempo impiegato dal corpo per arrivare alla base del piano inclinato è calcolabile dalla descrizione della dinamica del sistema. Come mostrato in figura, le forze agenti sul blocco possono essere scomposte in direzione perpendicolare e tangente il piano di appoggio. Il sistema di riferimento è indicato a fianco del corpo. L'equazione della dinamica del sistema è:

$$\hat{\imath})\ ma_x = mg\sin(\theta) - \mu_\mathrm{d} mg\cos(\theta)$$
$$\hat{\jmath})\ ma_y = N - mg\cos(\theta) = 0$$

Con $P_x = mgsin(\theta)$ e $P_y = mgcos(\theta)$.

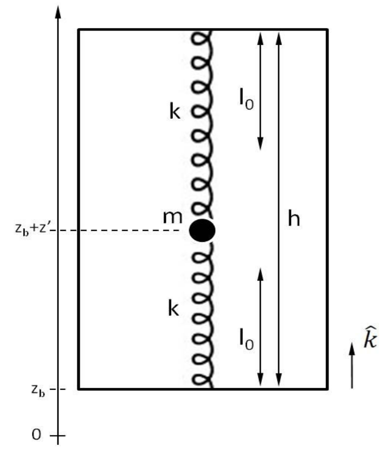
Dalla prima si ottiene $a_x = g(\sin(\theta) - \mu_\mathrm{d}\cos(\theta))$. L'accelerazione è dunque costante e il moto è rettilineo e uniformemente accelerato. La velocità, in tale moto, aumenta linearmente con il tempo:

$$v_\mathrm{f} = v_0 + a_x t$$

Quindi: $t = (v_\mathrm{f} - v_0)/a_x$ = 1.18 s.

2.

c) Secondo il sistema di riferimento in figura, ad uno spostamento Δz del corpo verso il basso corrisponde una variazione dell'allungamento di ciascuna molla pari a Δz. Poiché le due molle sono vincolate l'una all'altra, tale variazione sarà la stessa per entrambe le molle. A questo corrisponde, per ciascuna molla una forza elastica di modulo $F = k\Delta z$. Il modulo è lo stesso per entrambe le molle, avendo esse la medesima costante elastica. Questa situazione (sistema di molle in cui ciascuna si allunga della medesima quantità) corrisponde, per definizione, al sistema cosiddetto in parallelo. La costante elastica della molla equivalente al sistema delle due molle è pertanto la somma delle due: $k_{\text{eq}} = 2k = 40$ N.



La risultante delle due forze è, corrispondentemente, $\mathbf{F} = -k_{\text{eq}}\Delta z\, \hat{k}$. Quest'ultima è la forza elastica esercitata dalla molla equivalente (una sola molla di costante elastica 2k). Si faccia attenzione al fatto che la lunghezza a riposo di questa molla <u>equivalente</u> (non è una vera molla, ma solo un modo diverso di descrivere il sistema di due molle) è nella posizione $h/2$, infatti è in tale posizione che il sistema di due molle esercita una forza risultante nulla. Per la singola molla invece la lunghezza a riposo è diversa: solo quando la molla è lunga l_0 si ha allungamento nullo e quindi forza elastica nulla. In questo caso Δz sarà quindi l'allungamento rispetto ad $h/2$.

Una volta stabilito questo potremo quindi scrivere semplicemente, per il sistema in moto (riferendoci a un asse *z* rivolto verso l'alto):

$$ma_z = k_{\text{eq}}\Delta z - mg = k_{\text{eq}}(h/2 - z') - mg,$$

dove si è definito $z' = z - z_b$ (vedi figura).

Nota bene: il sistema di riferimento usato è quello inerziale fisso con la terra. Ciò non crea problemi perché, anche se la posizione del corpo varia rispetto ad esso, la posizione della base dell'ascensore varia nello stesso modo, cosicché la distanza $z - z_b$ non dipende dal sistema di riferimento.

Si noti che la forza elastica è diretta verso l'alto (altrimenti non si potrebbe mai equilibrare la forza peso).

Fatte queste premesse, si possono calcolare le grandezze richieste ai punti a) e b), come segue.

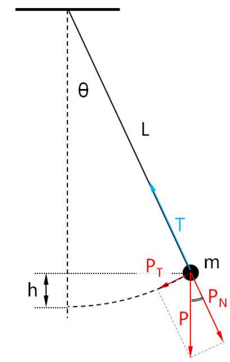
a) In questo caso $a_z = 0$, da cui $z_{\text{eq}}(b) = z' = \frac{h}{2} - \frac{mg}{k_{\text{eq}}} = 1.255$ m.

b) In questo caso $a_z = 3.5$ ms^{-2}. Si può scrivere: $ma_z = k_{\text{eq}}\frac{h}{2} - k_{\text{eq}}z' - mg$, da cui

$$z_{\text{eq}}\,(c) = z' = \frac{h}{2} - \frac{mg}{k_{\text{eq}}} - \frac{ma_z}{k_{\text{eq}}} = 1.170 \text{ m.}$$

3.

a) In un qualsiasi punto della traiettoria si possono scomporre le forze in direzione normale e in direzione tangenziale, come mostrato in figura:



Si ricavano le seguenti equazioni:

$$\hat{u}_N)\ ma_\mathrm{N} = T - mg\cos(\theta)$$
$$\hat{u}_T)\ ma_\mathrm{T} = -\,mg\sin(\theta)$$

Con $a_\mathrm{N} = \frac{v^2}{L}$, e dove $P_\mathrm{T} = mg\sin(\theta)$ e $P_\mathrm{N} = mg\cos(\theta)$ (vedi figura). Possiamo esprimere l'accelerazione tangenziale in coordinate polari come $a_T = L\alpha = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$ e approssimare $\sin(\theta)$ con θ (caso di piccole oscillazioni).

In questo modo si ricava l'equazione: $mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\,mg\theta$, che descrive un moto armonico in θ, con legge oraria $\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, dove A e φ sono costanti da determinarsi date le condizioni iniziali.

In particolare *A* rappresenta l'ampiezza massima dell'angolo θ durante l'oscillazione, che chiamiamo θ_0.

b) Il periodo delle piccole oscillazioni è $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 1.42$ s.

c) La tensione del filo è ricavabile dall'equazione $m\frac{v^2}{L} = T - mg\cos(\theta)$ (cioè quella lungo la direzione $\hat{u}_N$ scritta al punto a). La riscriviamo esprimendo *T*:

$$T = m\frac{v^2}{L} + mg\cos(\theta)$$

Considerando che sappiamo che la velocità *v* è massima in $\theta = 0$, dove contemporaneamente risulta massimo il valore della componente della forza peso, essendo $\cos(\theta = 0) = 1$, si ha immediatamente che in tale punto (quello più basso della traiettoria) la tensione *T* ha il suo valore massimo.

4.

Integrando rispetto al tempo la seconda equazione della dinamica espressa nella forma **F** = *d***p**/*dt* si ricava:

$$\mathbf{I} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \mathbf{F}\,dt = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \frac{d\mathbf{p}}{dt}\,dt = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} d\mathbf{p} = \Delta\mathbf{p}.$$

Dal grafico riportato nell'eserciziosi ricava che la componente dell'impulso lungo la direzione *x* in cui avviene il moto del carrello è pari a I_x = 1.5 Ns, uguale al modulo della variazione di quantità di moto $|\Delta p_x|$.

In un urto idealmente elastico fra la massa e i respingenti, l'energia cinetica della massa si conserva e quindi $v_\mathrm{iniz} = -v_\mathrm{finale}$ ovvero $|\Delta p_x| = 2|mv_\mathrm{iniz}|$

In un urto totalmente anelastico fra la massa e i respingenti, la velocità finale della massa è nulla, quindi $|\Delta p_x| = |mv_\mathrm{iniz}|$.