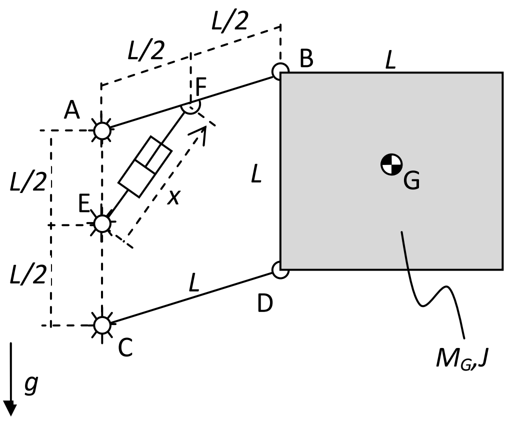
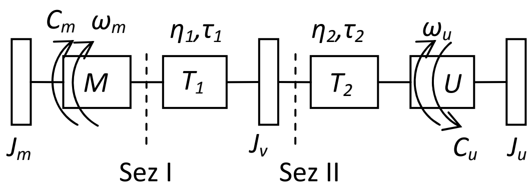
DINAMICA DI SISTEMI AEROSPAZIALI

Tema d'esame 03 settembre 2012



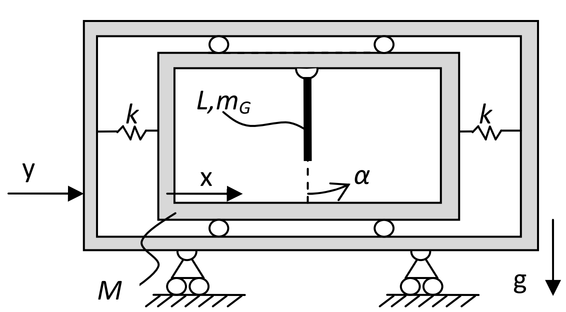
Esercizio 1. Il meccanismo in figura presenta due aste identiche AB e CD di lunghezza L e massa trascurabile. Le due aste sono incernierate a terra negli estremi indicati dai punti A e C allineati verticalmente e posti ad una distanza L. Le estremità libere (punti B e D) sono invece incernierate ad un lato verticale di un quadrato rigido di lato L, massa M_G e momento d'inerzia baricentrico J_G. Il baricentro del quadrato coincide con il punto G di figura, posizionato nel centro geometrico del quadrilatero stesso. Un attuatore oleodinamico è incernierato a terra nel punto E di mezzeria della congiungente gli estremi A e C, mentre la sua estremità mobile è incernierata in mezzeria all'asta AB (punto F). Scegliendo come coordinata libera la lunghezza x dell'attuatore si determinino:

1. Velocità e accelerazione del baricentro G, per la condizione di aste AB e CD orizzontali, con una velocità di allungamento $\dot{x}$ dell'attuatore costante.
2. La differenza di pressione Δp nelle camere dell'attuatore per garantire il moto descritto nel punto 1, con area del pistone A_p.
3. Le reazioni vincolari nelle cerniere a terra A e C allo spunto, con aste AB e CD orizzontali e accelerazione del baricentro G pari ad $\bar{a}$, diretta verso l'alto.



Esercizio 2. Il sistema meccanico di figura presenta un motore M, che eroga una coppia C_m alla velocità angolare ω_m, con un momento d'inerzia J_m. A valle del motore è posta una prima trasmissione T_1 di rendimento η_1 e rapporto τ_1, seguita da un volano di momento d'inerzia J_v e da una seconda trasmissione T_2, con rendimento η_2 e rapporto τ_2. A valle della seconda trasmissione si trova l'utilizzatore U che oppone una coppia resistente pari a C_u. Al termine della catena cinematica si trova un ulteriore inerzia rotorica di momento d'inerzia J_u. Sapendo che la coppia fornita dal motore è pari a C_m = A - B ω_m^2 e quella dell'utilizzatore è C_u = D ω_u, e considerando uguali i rendimenti di moto diretto e retrogrado, si deteminino:

1. La velocità angolare del motore a regime.
2. L'accelerazione angolare del motore allo spunto.
3. Le coppie torcenti allo spunto nelle sezioni: (I) tra motore M e trasmissione T_1, (II) tra volano J_v e trasmissione T_2.



Esercizio 3. Il sistema di figura è costituito da una cassa esterna che si muove senza attrito lungo una guida orizzontale, secondo un moto orizzontale imposto y. Una seconda cassa è montata all'interno della prima e può scorrere (senza attrito) al suo interno in direzione orizzontale. Due molle identiche, ognuna di rigidezza k, collegano le due casse. All'interno della seconda cassa è presente un'asta, di lunghezza L e massa m_G uniformemente distribuita. L'asta è incernierata in uno dei suoi vertici al lato alto della cassa più interna. Scegliendo come coordinate libere il moto assoluto x, in direzione orizzontale, della cassa interna e l'angolo α, formato dall'asta con la verticale:

1. Si verifichi che la posizione di figura sia di equilibrio stabile, con moto imposto y nullo (cassa esterna vincolata a terra).
2. Si calcolino le frequenze proprie del sistema nelle condizioni del punto precedente.
3. Si determini la posizione assoluta a regime del baricentro dell'asta per moto imposto del vincolo $y = Y\cos(\Omega t)$.

DINAMICA DI SISTEMI AEROSPAZIALI

Tema d'esame 03 - 09 - 2012

Traccia della soluzione.

Esercizio 1.
Si scelga come origine il punto C; il punto A si trova in $\vec{p}_\mathrm{A} = jL$; il punto D si trova in $\vec{p}_\mathrm{D} = L\mathrm{e}^{j\theta}$; il punto B si trova quindi in $\vec{p}_\mathrm{B} = \vec{p}_\mathrm{A} + L\mathrm{e}^{j\theta} = jL + L\mathrm{e}^{j\theta}$, mentre il punto G si trova in $\vec{p}_\mathrm{G} = \vec{p}_\mathrm{D} + L/2 + jL/2 = L\mathrm{e}^{j\theta} + L/2 + jL/2$. Il punto E si trova in $\vec{p}_\mathrm{E} = jL/2$, mentre il punto F si trova in $\vec{p}_\mathrm{F} = \vec{p}_\mathrm{A} + (L/2)\mathrm{e}^{j\theta} = jL + (L/2)\mathrm{e}^{j\theta}$.

1.1) Cinematica del punto G. La velocità del punto G è

$$\vec{v}_\mathrm{G} = \dot{\vec{p}}_\mathrm{G} = j\dot{\theta}L\mathrm{e}^{j\theta} \tag{1}$$

mentre la sua accelerazione è

$$\vec{a}_\mathrm{G} = \ddot{\vec{p}}_\mathrm{G} = j\ddot{\theta}L\mathrm{e}^{j\theta} - \dot{\theta}^2 L\mathrm{e}^{j\theta} \tag{2}$$

quindi per determinarla occorre esprimere θ e le sue derivate temporali in funzione di x e $\dot{x}$, per $\ddot{x} = 0$.

A tal fine, si consideri l'equazione di chiusura $\mathrm{EF} + \mathrm{FA} + \mathrm{AE} = 0$, ovvero

$$x\mathrm{e}^{j\phi} - \frac{L}{2}\mathrm{e}^{j\theta} - j\frac{L}{2} = 0 \tag{3}$$

da cui si ricava

$$x\cos\phi - \frac{L}{2}\cos\theta = 0 \tag{4a}$$

$$x\sin\phi - \frac{L}{2}\sin\theta - \frac{L}{2} = 0 \tag{4b}$$

Nella configurazione data, per cui $\theta = 0$, si ottiene $x\cos\phi = x\sin\phi = L/2$, per cui si ha $x = L\sqrt{2}/2$ e $\phi = \pi/4$.

Si derivi l'equazione di chiusura rispetto al tempo; si ottiene

$$\dot{x}\mathrm{e}^{j\phi} + j\dot{\phi}x\mathrm{e}^{j\phi} - j\dot{\theta}\frac{L}{2}\mathrm{e}^{j\theta} = 0 \tag{5}$$

ovvero

$$\dot{x}\cos\phi - \dot{\phi}x\sin\phi + \dot{\theta}\frac{L}{2}\sin\theta = 0 \tag{6a}$$

$$\dot{x}\sin\phi + \dot{\phi}x\cos\phi - \dot{\theta}\frac{L}{2}\cos\theta = 0 \tag{6b}$$

Nella configurazione considerata si ottiene

$$\dot{x}\frac{\sqrt{2}}{2} - \dot{\phi}\frac{L}{2} = 0 \tag{7a}$$

$$\dot{x}\frac{\sqrt{2}}{2} + \dot{\phi}\frac{L}{2} - \dot{\theta}\frac{L}{2} = 0 \tag{7b}$$

ovvero $\dot{\phi} = \dot{x}\sqrt{2}/L$ e $\dot{\theta} = \dot{x}2\sqrt{2}/L$.

Si derivi ulteriormente l'equazione di chiusura rispetto al tempo; si ottiene

$$\ddot{x}\mathrm{e}^{j\phi} + j2\dot{\phi}\dot{x}\mathrm{e}^{j\phi} + j\ddot{\phi}x\mathrm{e}^{j\phi} - \dot{\phi}^2 x\mathrm{e}^{j\phi} - j\ddot{\theta}\frac{L}{2}\mathrm{e}^{j\theta} + \dot{\theta}^2\frac{L}{2}\mathrm{e}^{j\theta} = 0 \tag{8}$$

ovvero

$$\ddot{x}\cos\phi - 2\dot{\phi}\dot{x}\sin\phi - \ddot{\phi}x\sin\phi - \dot{\phi}^2 x\cos\phi + \ddot{\theta}\frac{L}{2}\sin\theta + \dot{\theta}^2\frac{L}{2}\cos\theta = 0 \tag{9a}$$

$$\ddot{x}\sin\phi + 2\dot{\phi}\dot{x}\cos\phi + \ddot{\phi}x\cos\phi - \dot{\phi}^2 x\sin\phi - \ddot{\theta}\frac{L}{2}\cos\theta + \dot{\theta}^2\frac{L}{2}\sin\theta = 0 \tag{9b}$$

Nella configurazione considerata si ottiene

$$-\ddot{\phi}\frac{L}{2} + \dot{x}^2/L = 0 \tag{10a}$$

$$\dot{x}^2/L + \ddot{\phi}\frac{L}{2} - \ddot{\theta}\frac{L}{2} = 0 \tag{10b}$$

ovvero $\ddot{\phi} = \dot{x}^2 2/L^2$ e $\ddot{\theta} = \dot{x}^2 4/L^2$.

Ne conseguono

$$\vec{v}_{\mathrm{G}} = j2\sqrt{2}\dot{x} \tag{11}$$

e

$$\vec{a}_{\mathrm{G}} = j\dot{x}^2 4/L - \dot{x}^2 8/L \tag{12}$$

1.2) Differenza di pressione nelle camere. Si consideri il lavoro virtuale di tutte le forze attive, comprese le forze d'inerzia; si ottiene

$$\delta x A_p \Delta p + \delta\vec{p}_{\mathrm{G}} \times M_{\mathrm{G}}\vec{g} - \delta\vec{p}_{\mathrm{G}} \times M_{\mathrm{G}}\vec{a}_{\mathrm{G}} = 0 \tag{13}$$

da cui, considerando che lo spostamento virtuale del punto G,

$$\delta\vec{p}_{\mathrm{G}} = j\delta\theta L \mathrm{e}^{j\theta} \tag{14}$$

nella configurazione considerata vale $\delta\vec{p}_{\mathrm{G}} = j\delta\theta L = j\delta x 2\sqrt{2}$, si ottiene

$$\delta x A_p \Delta p - \delta x 2\sqrt{2} M_{\mathrm{G}} g - \delta x 2\sqrt{2} M_{\mathrm{G}} \dot{x}^2 4/L = 0 \tag{15}$$

e quindi, per l'arbitrarietà degli spostamenti virtuali, è immediato ricavare

$$\Delta p = \frac{2\sqrt{2}M_{\mathrm{G}}}{A_p}\left(g + 4\frac{\dot{x}^2}{L}\right) \tag{16}$$

1.3) Reazioni alle cerniere. Le cerniere fanno sì che venga scambiata solo forza con il terreno. In particolare, l'asta CD scambia solo una forza F_{C} diretta come CD stesso (si sceglie come verso positivo della forza agente sull'asta quello da C a D), quindi orizzontale nel caso in questione, mentre la forza scambiata in A può essere scomposta in componenti orizzontale H_{A} e verticale V_{A}, rispettivamente positive verso destra e verso l'alto per quanto riguarda la forza applicata all'asta.

La condizione di funzionamento è diversa da quanto calcolato in precedenza al punto 1.1. In particolare, ora il sistema è fermo e sta accelerando verso l'alto con accelerazione del baricentro nota. Tuttavia, siccome le forze attive non cambiano (anche nel caso al punto 1.1 l'accelerazione era verticale), l'espressione della pressione non cambia, a patto di porre $4\dot{x}^2/L = \overline{a}$, e quindi

$$\Delta p = \frac{2\sqrt{2}M_{\mathrm{G}}}{A_p}\left(g + \overline{a}\right). \tag{17}$$

Dall'equilibrio alla rotazione dell'intero sistema rispetto al punto C si ricava

$$-\frac{3}{2}LM_{\rm G}g-\frac{3}{2}LM_{\rm G}\overline{a}-LH_{\rm A}-\frac{L}{2}A_p\Delta p\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \tag{18}$$

dalla quale si ricava $H_{\rm A}=-5M_{\rm G}(g+\overline{a})/2$. Dall'equilibrio alla traslazione dell'intero sistema in direzione orizzontale si ricava

$$H_{\rm A}+F_{\rm C}+A_p\Delta p\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \tag{19}$$

dalla quale si ricava $F_{\rm C}=M_{\rm G}(g+\overline{a})/2$. Dall'equilibrio alla traslazione dell'intero sistema in direzione verticale si ricava

$$-M_{\rm G}g-M_{\rm G}\overline{a}+V_{\rm A}+A_p\Delta p\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \tag{20}$$

dalla quale si ricava $V_{\rm A}=-M_{\rm G}(g+\overline{a})$.

Esercizio 2.
La velocità angolare a valle della trasmissione T_1 è $\omega_v=\tau_1\omega_m$. La velocità angolare dell'utilizzatore è $\omega_u=\tau_2\omega_v=\tau_1\tau_2\omega_m$.

Si assuma moto diretto. La potenza uscente dal motore è $(C_m-J_m\dot{\omega}_m)\omega_m$. La potenza uscente dalla trasmissione T_1 è $\eta_1(C_m-J_m\dot{\omega}_m)\omega_m$. La potenza a valle del volano è $\eta_1(C_m-J_m\dot{\omega}_m)\omega_m-J_v\dot{\omega}_v\omega_v$. La potenza a valle della trasmissione T_2 è $\eta_2(\eta_1(C_m-J_m\dot{\omega}_m)\omega_m-J_v\dot{\omega}_v\omega_v)$. Quest'ultima, sommata alla potenza associata all'utilizzatore, $(C_u-J_u\dot{\omega}_u)\omega_u$, deve dare zero,

$$\eta_2\left(\eta_1\left(C_m-J_m\dot{\omega}_m\right)\omega_m-J_v\dot{\omega}_v\omega_v\right)+\left(C_u-J_u\dot{\omega}_u\right)\omega_u=0. \tag{21}$$

Considerando le relazioni cinematiche, si ottiene

$$\left(\eta_1\eta_2J_m+\eta_2\tau_1^2J_v+\tau_1^2\tau_2^2J_u\right)\dot{\omega}_m=\eta_1\eta_2C_m+\tau_1\tau_2C_u. \tag{22}$$

2.1) Velocità a regime. A regime, $\dot{\omega}_m=0$; si ottiene

$$\eta_1\eta_2C_m+\tau_1\tau_2C_u=\eta_1\eta_2\left(A-B\omega_m^2\right)-\tau_1^2\tau_2^2D\omega_m=0, \tag{23}$$

assumendo $A>0$, $B>0$, $D>0$. Si ottiene l'equazione

$$\eta_1\eta_2B\omega_m^2+\tau_1^2\tau_2^2D\omega_m-\eta_1\eta_2A=0 \tag{24}$$

a cui corrispondono le radici

$$\omega_m=-\frac{\tau_1^2\tau_2^2D}{2\eta_1\eta_2B}\pm\sqrt{\left(\frac{\tau_1^2\tau_2^2D}{2\eta_1\eta_2B}\right)^2+\frac{A}{B}} \tag{25}$$

di cui, perché il moto sia diretto, risulta accettabile solo quella positiva,

$$\omega_m=-\frac{\tau_1^2\tau_2^2D}{2\eta_1\eta_2B}+\sqrt{\left(\frac{\tau_1^2\tau_2^2D}{2\eta_1\eta_2B}\right)^2+\frac{A}{B}} \tag{26}$$

La condizione di regime risulta essere staticamente stabile se

$$\frac{\partial}{\partial\omega_m}\left(\eta_1\eta_2C_m+\tau_1\tau_2C_u\right)=-2\eta_1\eta_2B\omega_m-\tau_1^2\tau_2^2D<0 \tag{27}$$

Considerando la velocità di regime, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial \omega_m}\left(\eta_1\eta_2 C_m + \tau_1\tau_2 C_u\right) = -\sqrt{\left(\tau_1^2\tau_2^2 D\right)^2 + \left(2\eta_1\eta_2\right)^2 AB}, \tag{28}$$

che è sempre negativo.

2.2) Accelerazione allo spunto. Allo spunto, per $\omega_m = 0$, si ottiene $C_m = A$, $C_u = 0$, per cui l'accelerazione angolare del motore è

$$\dot{\omega}_m = \frac{\eta_1\eta_2 A}{\eta_1\eta_2 J_m + \eta_2\tau_1^2 J_v + \tau_1^2\tau_2^2 J_u}. \tag{29}$$

2.3) Coppie torcenti. Nella sezione (I) la coppia torcente si ricava direttamente dall'equilibrio alla rotazione del sottosistema costituito dal motore a seguito del sezionamento dell'albero nel punto (I), ovvero

$$C_I = C_m - J_m\dot{\omega}_m = \frac{\eta_2\tau_1^2 J_v + \tau_1^2\tau_2^2 J_u}{\eta_1\eta_2 J_m + \eta_2\tau_1^2 J_v + \tau_1^2\tau_2^2 J_u} A \tag{30}$$

Nella sezione (II) la coppia torcente si ricava dal bilancio di potenza tra la potenza a valle del volano e la potenza associata alla coppia torcente, $C_{II}\omega_v$, ovvero

$$\eta_1\left(C_m - J_m\dot{\omega}_m\right)\omega_m - J_v\dot{\omega}_v\omega_v = C_{II}\omega_v \tag{31}$$

Considerando la cinematica, si ottiene

$$\eta_1\left(C_m - J_m\dot{\omega}_m\right)\omega_m - \tau_1^2 J_v\dot{\omega}_m\omega_m = \tau_1 C_{II}\omega_m \tag{32}$$

ovvero

$$C_{II} = \frac{\eta_1}{\tau_1}\left(C_m - J_m\dot{\omega}_m\right) - \tau_1 J_v\dot{\omega}_m = \frac{\eta_1}{\tau_1}C_m - \left(\frac{\eta_1}{\tau_1}J_m + \tau_1 J_v\right)\dot{\omega}_m \tag{33}$$

Esercizio 3.

Lo spostamento assoluto in direzione orizzontale della prima cassa è $y(t)$, positivo verso destra, imposto. Lo spostamento assoluto in direzione orizzontale della seconda cassa è $x(t)$, positivo verso destra, ed è una coordinata libera. La posizione del baricentro dell'asta è

$$\vec{p}_G = \left\{\begin{array}{c} x \\ 0 \end{array}\right\} + \frac{L}{2}\left\{\begin{array}{c} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{array}\right\} \tag{34}$$

3.1) Verifica equilibrio. La posizione di equilibrio di figura è $x = 0$, $\theta = 0$. L'energia potenziale è

$$V = \frac{1}{2}k\left(x-y\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(y-x\right)^2 - m_G g\frac{L}{2}\cos\theta \tag{35}$$

Il gradiente dell'energia potenziale è

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2k\left(x-y\right) \tag{36a}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = m_G g\frac{L}{2}\sin\theta \tag{36b}$$

Per $y(t) = 0$ la soluzione ipotizzata annulla il gradiente dell'energia potenziale, e quindi, dal momento che non ci sono altri contributi alle forze generalizzate associate alle coordinate libere, è soluzione di equilibrio statico.

La matrice Hessiana dell'energia potenziale è

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & m_G g \dfrac{L}{2} \cos\theta \end{bmatrix} \tag{37}$$

Valutata in corrispondenza della soluzione di equilibrio, dà

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}_{x=0,\theta=0} = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & m_G g \dfrac{L}{2} \end{bmatrix} \tag{38}$$

La matrice è chiaramente definita positiva, quindi la configurazione è di equilibrio stabile. La matrice Hessiana valutata in corrispondenza della configurazione di equilibrio è la matrice di rigidezza del sistema linearizzato.

3.2) Frequenze caratteristiche e modi propri. L'energia cinetica associata al sistema è

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_G \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} m_G \frac{L^2}{12} \dot{\theta}^2. \tag{39}$$

La velocità del baricentro è

$$\vec{v}_G = \dot{\vec{p}}_G = \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} \\ 0 \end{array} \right\} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \left\{ \begin{array}{c} \cos\theta \\ \sin\theta \end{array} \right\} \tag{40}$$

quindi il termine $\vec{v}_G \cdot \vec{v}_G$ è

$$\vec{v}_G \cdot \vec{v}_G = \left(\dot{x} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos\theta \right)^2 + \left(\frac{L}{2} \dot{\theta} \sin\theta \right)^2 \tag{41}$$

L'energia cinetica, valutata in corrispondenza della configurazione di equilibro statico, diventa quindi

$$\begin{aligned} T_{x=0,\theta=0} &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_G \left(\dot{x}^2 + 2 \frac{L}{2} \dot{\theta} \dot{x} + \frac{L^2}{4} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} m_G \frac{L^2}{12} \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left((M + m_G) \dot{x}^2 + 2 m_G \frac{L}{2} \dot{x} \dot{\theta} + m_G \frac{L^2}{3} \dot{\theta}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{array} \right\}^T \begin{bmatrix} M + m_G & m_G \dfrac{L}{2} \\ m_G \dfrac{L}{2} & m_G \dfrac{L^2}{3} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{42}$$

Il problema diventa

$$\begin{bmatrix} M + m_G & m_G \dfrac{L}{2} \\ m_G \dfrac{L}{2} & m_G \dfrac{L^2}{3} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & m_G g \dfrac{L}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} x \\ \theta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2ky \\ 0 \end{array} \right\} \tag{43}$$

Gli autovalori si ottengono dalla soluzione di

$$\det \left(\lambda^2 \begin{bmatrix} M + m_G & m_G \dfrac{L}{2} \\ m_G \dfrac{L}{2} & m_G \dfrac{L^2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & m_G g \dfrac{L}{2} \end{bmatrix} \right) = 0 \tag{44}$$

ovvero

$$\left(\lambda^2 (M+m_G)+2k\right)\left(\lambda^2 m_G\frac{L^2}{3}+m_G g\frac{L}{2}\right)-\lambda^4 m_G^2\frac{L^2}{4}=$$
$$\lambda^4\left(Mm_G\frac{L^2}{3}+m_G^2\frac{L^2}{3}-m_G^2\frac{L^2}{4}\right)+\lambda^2\left((M+m_G)\,m_G g\frac{L}{2}+m_G\frac{L^2}{3}2k\right)+2km_G g\frac{L}{2}=$$
$$a\lambda^4+b\lambda^2+c=0 \tag{45}$$

da cui si ricava

$$\lambda^2=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}} \tag{46}$$

Gli autovettori si possono ricavare, ad esempio, eliminando la seconda equazione e scrivendo la prima come

$$\left(\lambda^2 (M+m_G)+2k\right)\frac{x_1}{x_2}=-\lambda^2 m_G\frac{L}{2} \tag{47}$$

sostituendo a λ^2 l'autovalore associato all'autovettore che si desidera determinare.

3.3) Risposta in frequenza. Per $y(t)=Y\cos(\Omega t)$, si consideri una soluzione del tipo

$$\left\{\begin{array}{c} x(t)\\ \theta(t)\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} X\\ \Theta\end{array}\right\}\cos(\Omega t) \tag{48}$$

L'equazione diventa

$$\left(-\Omega^2\left[\begin{array}{cc} M+m_G & m_G\frac{L}{2}\\ m_G\frac{L}{2} & m_G\frac{L^2}{3}\end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc} 2k & 0\\ 0 & m_G g\frac{L}{2}\end{array}\right]\right)\left\{\begin{array}{c} X\\ \Theta\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} 2kY\\ 0\end{array}\right\} \tag{49}$$

Nell'ipotesi che Ω sia sufficientemente diversa dai due autovalori del problema, la matrice si può invertire per trovare X e Θ in funzione del movimento imposto Y.

A questo punto, la posizione approssimata del baricentro dell'asta è

$$\vec{p}_G=\left\{\begin{array}{c} X+\frac{L}{2}\Theta\\ 0\end{array}\right\}\cos(\Omega t) \tag{50}$$

Un'approssimazione di ordine superiore è

$$\vec{p}_G=\left\{\begin{array}{c} X\cos(\Omega t)\\ 0\end{array}\right\}+\frac{L}{2}\left\{\begin{array}{c} \sin(\Theta\cos(\Omega t))\\ -\cos(\Theta\cos(\Omega t))\end{array}\right\} \tag{51}$$