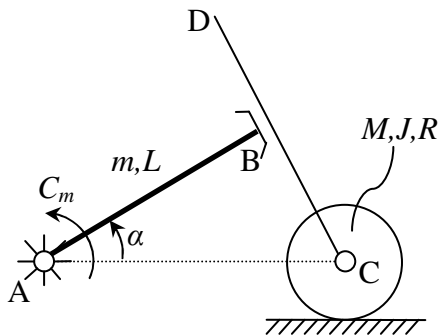


DINAMICA DI SISTEMI AEROSPAZIALI

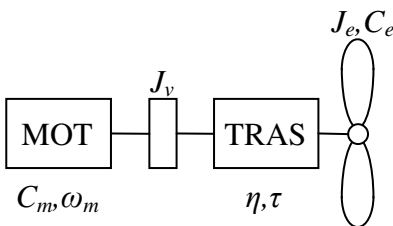
Tema d'esame 06 febbraio 2012



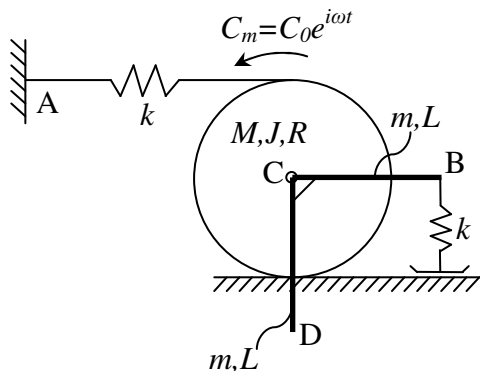
Esercizio 1. Nel meccanismo in figura la manovella AB (lunghezza L) ruota a velocità angolare $\dot{\alpha} = costante$. Alla sua estremità B un pattino la collega ad una seconda asta CD, di massa trascurabile, con cui forma un angolo di 90° . Un disco di raggio R è incernierato, nel suo centro, all'estremità C di quest'ultima asta. Il disco, di massa M e momento d'inerzia baricentrico J , rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Considerando i punti C ed A allineati verticalmente, si richiede di determinare, per la condizione $\alpha = \frac{\pi}{3}$:

- 1) la velocità angolare ω e l'accelerazione angolare $\dot{\omega}$ del disco;
- 2) la coppia C_m da applicare alla manovella per garantire il moto;
- 3) la verifica di aderenza del disco sulla guida orizzontale con coefficiente di attrito statico f_s .

Esercizio 2. Un motore a corrente continua, con resistenza R_a , induttanza trascurabile e caratteristica K , è alimentato a tensione $V = costante$. All'albero motore è collegato un volano di momento d'inerzia J_v e, in seguito, una trasmissione con rapporto di riduzione τ e rendimento η . A valle della trasmissione è collegata un'elica di momento d'inerzia J_e , che genera una coppia resistente C_e proporzionale al quadrato della velocità ω_e di rotazione della stessa ($|C_e| = A \omega_e^2$). Si richiede:



- 1) il calcolo della velocità di rotazione dell'elica a regime;
- 2) la verifica della stabilità dell'equilibrio raggiunto;
- 3) il dimensionamento del volano per ottenere un'accelerazione allo spunto $\dot{\omega}_{e0} < \dot{\omega}_{max}$;
- 4) l'identificazione della velocità limite raggiunta dal sistema nel caso di distacco dell'elica.



Esercizio 3. Il sistema in figura presenta un disco di massa M , raggio R e momento d'inerzia baricentrico J , che rotola senza strisciare su una guida orizzontale. Una fune si avvolge senza strisciare sul disco alla sua sommità. L'estremo della fune è collegato con una molla di rigidezza k , a sua volta collegata a terra nel punto A. Nel centro del disco (punto C) è incernierato un corpo rigido, costituito da due aste identiche (CD e CB), ciascuna di massa m e lunghezza L , incastrate fra loro a formare un angolo di 90° . All'estremità B dell'asta orizzontale è fissata una molla, che si mantiene in posizione verticale e scorre lungo la stessa guida orizzontale. Si determini:

- 1) il precarico degli elementi elastici per garantire che la posizione di figura sia di equilibrio;
- 2) le equazioni di moto, linearizzate attorno alla suddetta posizione di equilibrio;
- 3) la risposta, a transitorio esaurito, ad una coppia $C_m = C_0 e^{i\omega t}$ applicata al disco.

Traccia di soluzione

Esercizio 1. La rotazione θ del disco, positiva in senso orario, grazie al vincolo di puro rotolamento è legata alla traslazione del punto C in direzione parallela al piano orizzontale, $\theta = x_C/R$, come pure le sue derivate $\omega = \dot{\theta} = \dot{x}_C/R$ e $\dot{\omega} = \ddot{\theta} = \ddot{x}_C/R$.

1.1) Cinematica. Per il calcolo di x_C si può scrivere la relazione di chiusura

$$AB = AC + CB. \quad (1)$$

Si ponga $AB = Le^{j\alpha}$, $AC = x$, $CB = ye^{j\beta}$, con $\beta = \pi/2 + \alpha$ per via del pattino, mentre y rappresenta la distanza tra i punti C e B. Si ottiene

$$Le^{j\alpha} = x + ye^{j(\pi/2+\alpha)}, \quad (2)$$

ovvero

$$Le^{j\alpha} = x + jye^{j\alpha}, \quad (3)$$

da cui si ricava

$$L \cos \alpha = x - y \sin \alpha \quad (4a)$$

$$L \sin \alpha = y \cos \alpha. \quad (4b)$$

Dalla seconda si ricava

$$y = L \tan \alpha, \quad (5)$$

che sostituito nella prima dà

$$x = L (\cos \alpha + \tan \alpha \sin \alpha). \quad (6)$$

Per $\alpha = \pi/3$ si ha $y = \sqrt{3}L$ e $x = 2L$.

La derivata prima dell'equazione di chiusura,

$$j\dot{\alpha}Le^{j\alpha} = \dot{x} + j\dot{y}e^{j\alpha} - y\dot{\alpha}e^{j\alpha}, \quad (7)$$

consente di scrivere

$$-L\dot{\alpha} \sin \alpha = \dot{x} - \dot{y} \sin \alpha - y\dot{\alpha} \cos \alpha \quad (8a)$$

$$L\dot{\alpha} \cos \alpha = \dot{y} \cos \alpha - y\dot{\alpha} \sin \alpha, \quad (8b)$$

da cui si ricava

$$\dot{y} = L (1 + \tan^2 \alpha) \dot{\alpha} \quad (9a)$$

$$\dot{x} = L \sin \alpha (1 + \tan^2 \alpha) \dot{\alpha} \quad (9b)$$

che, per $\alpha = \pi/3$, dà $\dot{y} = 4L\dot{\alpha}$ e $\dot{x} = 2\sqrt{3}L\dot{\alpha}$.

La derivata seconda dell'equazione di chiusura,

$$-\dot{\alpha}^2 Le^{j\alpha} = \ddot{x} + j\ddot{y}e^{j\alpha} - 2\dot{y}\dot{\alpha}e^{j\alpha} - jy\dot{\alpha}^2 e^{j\alpha}, \quad (10)$$

consente di scrivere

$$-L\dot{\alpha}^2 \cos \alpha = \ddot{x} - \ddot{y} \sin \alpha - 2\dot{y}\dot{\alpha} \cos \alpha + y\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \quad (11a)$$

$$-L\dot{\alpha}^2 \sin \alpha = \ddot{y} \cos \alpha - 2\dot{y}\dot{\alpha} \sin \alpha - y\dot{\alpha}^2 \cos \alpha, \quad (11b)$$

da cui si ricava

$$\ddot{y} = 2L \tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha) \dot{\alpha}^2 \quad (12a)$$

$$\ddot{x} = L \cos \alpha (1 + 2 \tan^2 \alpha) (1 + \tan^2 \alpha) \dot{\alpha}^2 \quad (12b)$$

che, per $\alpha = \pi/3$, dà $\ddot{y} = 8\sqrt{3}L\dot{\alpha}^2$ e $\ddot{x} = 14L\dot{\alpha}^2$.

Quindi, la velocità e l'accelerazione angolare del disco all'istante considerato sono rispettivamente $\omega = 2\sqrt{3}(L/R)\dot{\alpha}$ e $\dot{\omega} = 14(L/R)\dot{\alpha}^2$.

1.2) Coppia motrice. L'energia cinetica del sistema è

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}_G \times \vec{v}_G + \frac{1}{2}J_G\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\omega^2. \quad (13)$$

Il modulo della velocità del baricentro dell'asta AB, la cui massa è supposta uniformemente distribuita, è $L/2\dot{\alpha}$, ed è diretta tangenzialmente. Si ha quindi

$$E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 + \left(M + \frac{J}{R^2} \right) \dot{x}^2 \right). \quad (14)$$

La potenza delle forze attive è associata alla coppia motrice e alla forza peso, quest'ultima diversa da zero solo per quanto riguarda la massa dell'asta AB,

$$\Pi = C_m\dot{\alpha} + m\vec{g} \times \vec{v}_G = C_m\dot{\alpha} - mg\frac{L}{2} \cos \alpha \dot{\alpha} \quad (15)$$

Dalla derivata dell'energia cinetica rispetto al tempo eguagliata alla potenza delle forze attive si ricava

$$\left(\frac{1}{3}mL^2\ddot{\alpha} + \left(M + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \dot{\alpha} = \left(C_m - mg\frac{L}{2} \cos \alpha \right) \dot{\alpha}, \quad (16)$$

da cui si ottiene la coppia motrice

$$C_m = mg\frac{L}{2} \cos \alpha + \frac{1}{3}mL^2\ddot{\alpha} + \left(M + \frac{J}{R^2} \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} \ddot{x} \quad (17)$$

1.3) Verifica di aderenza. La componente tangenziale della reazione al contatto del disco con il terreno, positiva verso sinistra, si ricava scrivendo l'equilibrio alla rotazione del solo disco rispetto al proprio centro. Si ricava

$$R_T = \frac{J\dot{\omega}}{R} = \frac{J}{R^2}\ddot{x}. \quad (18)$$

La componente normale si ricava scrivendo l'equilibrio alla traslazione del disco e dell'asta CD lungo la direzione consentita dal pattino in B, ovvero

$$(R_N - Mg) \sin \beta - (R_T + M\ddot{x}) \cos \beta = 0, \quad (19)$$

da cui si ricava

$$R_N = Mg + (R_T + M\ddot{x}) / \tan \beta. \quad (20)$$

In alternativa si può scrivere l'equilibrio alla rotazione dell'intero sistema rispetto al punto A. La verifica di aderenza consiste nel verificare che $\|R_T\|/R_N < f_s$.

Esercizio 2.

Sia ω_m la velocità angolare del motore. La velocità dell'elica è $\omega_e = \tau\omega_m$. Nell'ipotesi che il moto sia diretto, l'accelerazione del motore è

$$\dot{\omega}_m = \frac{\eta C_m - \tau^3 A \omega_m^2}{\eta J_v + \tau^2 J_e}. \quad (21)$$

Il motore elettrico in corrente continua eroga una coppia $C_m = Ki$, proporzionale alla corrente che circola nelle spire. Siccome il motore è comandato imponendo il valore della tensione, la corrente si ricava dall'equazione di maglia come

$$i = \frac{V}{R} - \frac{K}{R}\omega_m, \quad (22)$$

da cui

$$C_m = \frac{K}{R}V - \frac{K^2}{R}\omega_m. \quad (23)$$

2.1) Velocità a regime. Sia $\dot{\omega}_m = 0$. Supponendo nota la coppia motrice, si ricava

$$\omega_m = \sqrt{\frac{\eta C_m}{\tau^3 A}}, \quad (24)$$

ove si è scartata la radice negativa. A questo punto, nota la coppia e la velocità di regime, si ricava la tensione di alimentazione

$$V = \frac{R}{K}C_m + K\omega_m. \quad (25)$$

In alternativa, si sostituisca alla coppia motrice la sua espressione in funzione della tensione e della velocità angolare, dopo aver posto l'accelerazione angolare a zero,

$$\eta \frac{K}{R}V - \eta \frac{K^2}{R}\omega - \tau^3 A \omega_m^2 = 0 \quad (26)$$

e si espliciti la velocità angolare,

$$\omega_m = -\frac{\eta K^2}{2\tau^3 AR} + \sqrt{\left(\frac{\eta K^2}{2\tau^3 AR}\right)^2 + \frac{\eta KV}{\tau^3 AR}}, \quad (27)$$

ove si è scartata la radice negativa.

2.2) Stabilità della soluzione di regime. All'equilibrio si ha

$$0 = \eta C_m - \tau^3 A \omega_m^2, \quad (28)$$

ovvero

$$0 = \eta \left(\frac{K}{R}V - \frac{K^2}{R}\omega_m \right) - \tau^3 A \omega_m^2. \quad (29)$$

La derivata di questa relazione rispetto a ω dà

$$-\frac{K^2}{R} - 2\tau^3 A \omega_m < 0. \quad (30)$$

La soluzione è staticamente stabile.

2.3) Dimensionamento volano allo spunto. Allo spunto $\omega_m = 0$, quindi la coppia motrice è $C_m = (K/R)V$. L'accelerazione dell'elica è

$$\dot{\omega}_e = \tau \dot{\omega}_m = \frac{\tau \eta \frac{K}{R} V}{\eta J_v + \tau^2 J_e}. \quad (31)$$

L'inerzia del volano che garantisce la prestazione desiderata è

$$J_v \geq \max \left(\frac{\tau K}{\dot{\omega}_e R} V - \frac{\tau^2}{\eta} J_e, 0 \right). \quad (32)$$

2.4) Velocità limite. In caso di distacco dell'elica, $C_u = 0$ e $J_u = 0$. La velocità limite si ottiene quindi quando $C_m = 0$, ovvero

$$\omega_m = \frac{V}{K}. \quad (33)$$

Esercizio 3.

Il sistema ha due gradi di libertà, la rotazione del disco, θ , e la rotazione del corpo BCD, ψ , entrambe positive in senso antiorario. La posizione del centro del disco è

$$\vec{P}_C = \begin{Bmatrix} -R\theta \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (34)$$

La posizione del baricentro dell'asta CD è

$$\vec{P}_{G_{CD}} = P_C + \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} \sin \psi \\ -\cos \psi \end{Bmatrix}, \quad (35)$$

mentre la posizione del baricentro dell'asta BC è

$$\vec{P}_{G_{BC}} = \vec{P}_C + \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{Bmatrix}. \quad (36)$$

La velocità del baricentro dell'asta CD è

$$\vec{v}_{G_{CD}} = \begin{Bmatrix} -R\dot{\theta} + \dot{\psi} \frac{L}{2} \cos \psi \\ \dot{\psi} \frac{L}{2} \sin \psi \end{Bmatrix}, \quad (37)$$

mentre la velocità del baricentro dell'asta BC è

$$\vec{v}_{G_{BC}} = \begin{Bmatrix} -R\dot{\theta} - \dot{\psi} \frac{L}{2} \sin \psi \\ \dot{\psi} \frac{L}{2} \cos \psi \end{Bmatrix}. \quad (38)$$

3.1) Precarico all'equilibrio. Il sistema, per $C_m = 0$, è sottoposto solamente a forze conservative. L'energia potenziale del sistema è

$$E_p = \frac{1}{2} k (2R(\theta - \theta_0))^2 + \frac{1}{2} k (L \sin \psi - u_0)^2 - mg \frac{L}{2} \cos \psi + mg \frac{L}{2} \sin \psi. \quad (39)$$

L'annullamento del gradiente dell'energia potenziale,

$$4kR^2(\theta - \theta_0) = 0 \quad (40a)$$

$$kL(L \sin \psi - u_0) + mg \frac{L}{2}(\cos \psi + \sin \psi) = 0, \quad (40b)$$

imponendo che $\theta = 0$ e $\psi = 0$ sia soluzione di equilibrio, consente di calcolare

$$\theta_0 = 0 \quad (41a)$$

$$u_0 = \frac{mg}{2k}. \quad (41b)$$

La matrice Hessiana dell'energia potenziale consente di valutare la stabilità del sistema.

$$[H] = \begin{bmatrix} 4kR^2 & 0 \\ 0 & kL^2 + mg \frac{L}{2}(\cos \psi - \sin \psi) \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Nella soluzione considerata, la matrice è definita positiva, quindi la soluzione è stabile.

3.2) Equazioni linearizzate del moto. L'energia cinetica è

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}M(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_{\text{GBC}} \times \vec{v}_{\text{GBC}} + \frac{1}{2}m\vec{v}_{\text{GCD}} \times \vec{v}_{\text{GCD}} + \frac{1}{2}2\frac{1}{12}mL^2\dot{\psi}^2 \\ &= \frac{1}{2}(MR^2 + J)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(2R^2\dot{\theta}^2 + RL(\sin \psi - \cos \psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + 2\frac{L^2}{3}\dot{\psi}^2\right) \\ &\cong \frac{1}{2}(MR^2 + J + 2mR^2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mRL\dot{\theta}\dot{\psi} + \frac{1}{2}2\frac{1}{3}mL^2\dot{\psi}^2. \end{aligned} \quad (43)$$

Il lavoro virtuale della coppia è

$$\delta\mathcal{L} = \delta\theta C_m. \quad (44)$$

Le equazioni linearizzate del moto sono

$$\begin{bmatrix} (M + 2m)R^2 + J & -\frac{1}{2}mRL \\ -\frac{1}{2}mRL & \frac{2}{3}mL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4kR^2 & 0 \\ 0 & kL^2 + mg \frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

3.3) Risposta a forzante armonica. La soluzione ha la forma

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Theta \\ \Psi \end{Bmatrix} e^{j\Omega t}. \quad (46)$$

Si ottiene

$$\left(-\Omega^2 \begin{bmatrix} (M + 2m)R^2 + J & -\frac{1}{2}mRL \\ -\frac{1}{2}mRL & \frac{2}{3}mL^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4kR^2 & 0 \\ 0 & kL^2 + mg \frac{L}{2} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Theta \\ \Psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (47)$$

A condizione che Ω sia diverso dalle frequenze caratteristiche del sistema, l'equazione sopra riportata consente di risolvere il problema.