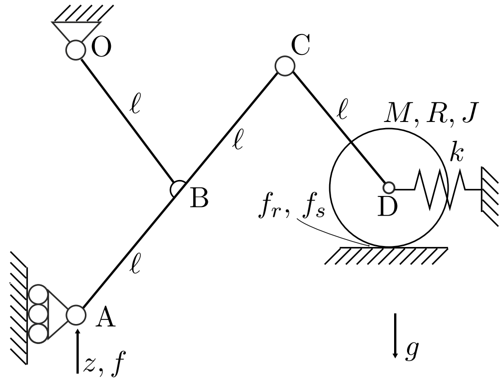
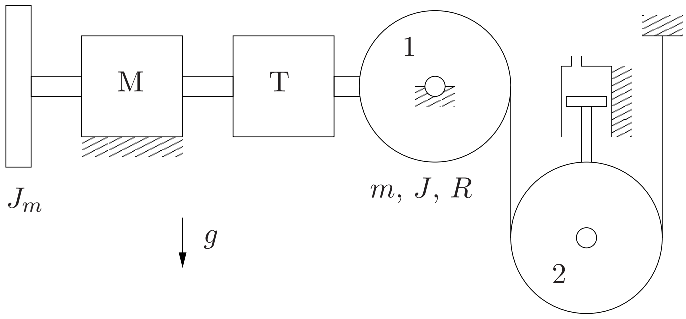
DINAMICA DI SISTEMI AEROSPAZIALI

Tema d'esame 04 - 02 - 2014

Esercizio 1. Il sistema di figura, posto nel piano verticale, è costituito dalle travi, collegate da cerniere e di massa trascurabile, AC (lunghezza 2ℓ), OB e CD (lunghezza ℓ) e da un disco di massa M, momento d'inerzia baricentrico J e raggio R, che rotola su di un piano orizzontale. Al centro del disco, nel punto D, è collegata una molla di rigidezza k. Lo spostamento verticale dell'estremo A dell'asta AC, posto sulla verticale del punto O, sia z. Il contatto tra disco e piano orizzontale avvenga con resistenza al rotolamento caratterizzata da un coefficiente f_r e attrito statico di coefficiente f_s.



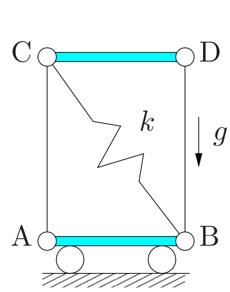
1.a) Si determinino posizione, velocità e accelerazione del disco per $\dot{z}$ costante positiva.;
1.b) si verifichi l'aderenza del disco nelle condizioni del punto (1.a);
1.c) si determinini la forza f necessaria a mantenere il moto nelle condizioni del punto (1.a);



Esercizio 2. Un motore M di inerzia J_m eroga una coppia motrice $C_m = A - B\omega_m$, con $A > 0$ e $B > 0$. Mediante una trasmissione T con rapporto di trasmissione τ e rendimento η muove il disco 1, di raggio R, massa m e inerzia baricentrica J, posto in un piano verticale, sul quale si avvolge senza strisciare una fune inestensibile di massa trascurabile. La fune si avvolge, sempre senza strisciare, anche attorno al disco 2, identico al disco 1, per collegarsi infine a terra.
Il disco 2, salendo, spinge un pistone di sezione A_p lungo un cilindro e forza un fluido incomprimibile ad uscire attraverso un orifizio di sezione A_o e caratterizzato dal coefficiente di efflusso turbolento C_e.

2.a) Si calcoli la velocità di regime in salita;
2.b) si valuti la stabilità della soluzione nel caso (2.a);
2.c) nella condizione (2.b) si determini l'accelerazione all'istante in cui si ponga improvvisamente $A = 0$;
2.d) si determini la tensione in entrambe le funi nel caso (2.c).

Esercizio 3. Un corpo A–B rotola su due rulli di raggio R e inerzia trascurabile. Al corpo A–B è collegato un corpo C–D mediante due aste A–C e B–D di lunghezza 4ℓ, incernierate a distanza A–B e C–D pari a 3ℓ. Le aste hanno massa trascurabile, mentre i due corpi hanno massa m. Lungo la diagonale B–C del quadrilatero ABDC è collegata una molla di rigidezza k, scarica nella configurazione di figura. Il sistema è posto nel piano verticale.



3.a) Si scrivano le equazioni del moto linearizzate rispetto alla configurazione di figura;
3.b) si determini la rigidezza della molla che garantisce la stabilità statica del sistema;
3.c) si calcolino le frequenze caratteristiche del sistema e le forme dei modi propri di vibrare, ponendo $k = (25/4)mg/\ell$.

N.B.: si definisca e si commenti opportunamente qualsivoglia dato ritenuto mancante.

Traccia di soluzione

Esercizio 1.

1.a) Posizione, velocità e accelerazione del disco. Il disco si muove di moto rototraslatorio senza strisciamento. La rotazione (positiva in senso orario) è $\theta = x_\mathrm{D}/R$, con velocità e accelerazione angolari di conseguenza.

La posizione del centro del disco richiede la conoscenza del movimento del punto C. Detto ψ l'angolo formato da OB rispetto alla verticale, $x_\mathrm{B} = \ell\sin\psi$ e $y_\mathrm{B} = -\ell\cos\psi$. siccome il triangolo OAB è strutturalmente isoscele, anche l'angolo che AB forma con la verticale è ψ, quindi $y_\mathrm{A} = -2\ell\cos\psi$. Di conseguenza, $y_\mathrm{C} \equiv 0$ e $x_\mathrm{C} = 2\ell\sin\psi$. Siccome la quota di C non varia, l'angolo formato da CD rispetto alla verticale non varia. Ne consegue che $x_\mathrm{D} = x_\mathrm{C} = 2\ell\sin\psi$.

A questo punto è possibile esprimere x_D in funzione di y_A,

$$x_\mathrm{D} = 2\ell\sin\psi = 2\ell\sqrt{1-\cos^2\psi} = 2\ell\sqrt{1-\left(\frac{y_\mathrm{A}}{2\ell}\right)^2} \tag{1}$$

Le velocità sono $\dot{y}_\mathrm{A} = \dot{z} = 2\ell\sin\psi\dot{\psi}$ e $\dot{x}_\mathrm{D} = 2\ell\cos\psi\dot{\psi}$, da cui si ricava

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{z}}{2\ell\sin\psi} \tag{2}$$

$$\dot{x}_\mathrm{D} = \frac{\dot{z}}{\tan\psi} = -\frac{y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{D}}\dot{z} \tag{3}$$

purché $0 < \psi < \pi$ e, derivando ulteriormente e ricordando che $\ddot{z} = 0$,

$$\ddot{x}_\mathrm{D} = -\left(1+\left(\frac{y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{D}}\right)^2\right)\frac{\dot{z}^2}{x_\mathrm{D}} \tag{4}$$

1.b) Verifica aderenza disco. Occorre verificare che $N_\mathrm{D} > 0$ e $|T_\mathrm{D}|/N_\mathrm{D} < f_s$. Per il calcolo delle componenti della reazione vincolare al contatto in D occorre anche calcolare la coppia resistente al rotolamento C_r. Per $C_r = f_r N_\mathrm{D} R$ occorre determinare la componente normale della reazione in D. Equilibrio del disco alla rotazione rispetto a D:

$$-J\ddot{\theta} - f_r N_\mathrm{D} R + RT_\mathrm{D} = 0 \tag{5}$$

da cui

$$T_\mathrm{D} = \frac{J}{R^2}\ddot{x}_\mathrm{D} + f_r N_\mathrm{D} \tag{6}$$

Equilibrio del disco alla rotazione rispetto a C:

$$-J\ddot{\theta} - f_r N_\mathrm{D} R + (R+\ell\sin\alpha)T_\mathrm{D} + \ell\sin\alpha\,(M\ddot{x}_\mathrm{D} + kx_\mathrm{D}) + \ell\cos\alpha\,(Mg - N_\mathrm{D}) = 0 \tag{7}$$

dove α è l'angolo di cui è inclinata l'asta CD rispetto all'orizzontale, da cui

$$-J\frac{\ddot{x}_\mathrm{D}}{R} - f_r N_\mathrm{D} R + (R+\ell\sin\alpha)\left(\frac{J}{R^2}\ddot{x}_\mathrm{D} + f_r N_\mathrm{D}\right) + \ell\sin\alpha\,(M\ddot{x}_\mathrm{D} + kx_\mathrm{D}) + \ell\cos\alpha\,(Mg - N_\mathrm{D}) = 0 \tag{8}$$

e quindi

$$N_\mathrm{D} = \frac{\tan\alpha\left(J/R^2 + M\right)\ddot{x}_\mathrm{D} + \tan\alpha k x_\mathrm{D} + Mg}{1 - \tan\alpha f_r} \tag{9}$$

L'accelerazione $\ddot{x}_\mathrm{D}$ è nota dalla cinematica, ed è positiva; quindi, per $x_\mathrm{D} > 0$ si ha $N_\mathrm{D} > 0$ (a condizione che $\tan\alpha f_r < 1$); anche $T_\mathrm{D} > 0$. La verifica di aderenza comporta

$$\left|\frac{T_\mathrm{D}}{N_\mathrm{D}}\right| = \left|\frac{\frac{J}{R^2}\ddot{x}_\mathrm{D}}{N_\mathrm{D}} + f_r\right| = \frac{\frac{J}{R^2}\ddot{x}_\mathrm{D}}{N_\mathrm{D}} + f_r < f_s \tag{10}$$

ovvero

$$\left((1-\tan\alpha f_s)\frac{J}{R^2}-(f_s-f_r)\tan\alpha M\right)\ddot{x}_{\mathrm{D}}<(f_s-f_r)(\tan\alpha k x_{\mathrm{D}}+Mg) \tag{11}$$

ove è lecito ritenere $f_s > f_r$. Qualora il coefficiente di $\ddot{x}_{\mathrm{D}}$ fosse negativo (ad esempio, ma non solo, per $J \ll MR^2$), non ci sarebbero limiti all'accelerazione.

1.c) Forza necessaria. PLV:

$$\delta\mathcal{L}=-\delta x_{\mathrm{D}}M\ddot{x}_{\mathrm{D}}-\delta\theta J\ddot{\theta}-\delta x_{\mathrm{D}}k x_{\mathrm{D}}+\delta y_{\mathrm{A}}f-\delta\theta C_r=0 \tag{12}$$

Posti $\delta y_{\mathrm{A}}=2\ell\sin\psi\delta\psi$, $\delta x_{\mathrm{D}}=2\ell\cos\psi\delta\psi$ e $\delta\theta=2\ell\cos\psi\delta\psi/R$, dal PLV si ricava

$$f=\frac{1}{\tan\psi}\frac{1}{1-\tan\alpha f_r}\left(\left(M+\frac{J}{R^2}\right)\ddot{x}_{\mathrm{D}}+k x_{\mathrm{D}}+f_r M g\right) \tag{13}$$

Esercizio 2.

2.a) Velocità di regime in salita. Sia ω_m la velocità angolare del motore. Sia $\omega_u=\tau\omega_m$ la velocità angolare del disco 1. Sia $v_1=R\omega_u=\tau R\omega_m$ la velocità verticale della fune tra disco 1 e 2. Sia $v_2=v_1/2=\tau R\omega_m/2$ la velocità di salita del disco 2 e del pistone. Sia $\omega_2=\omega_u/2=\tau\omega_m/2$ la velocitá angolare del disco 2.

Il bilancio di portata nel cilindro è

$$-A_p v_2=-C_e A_o\sqrt{p-p_e} \tag{14}$$

(nota: in alternativa $q=C_e A_o\sqrt{2\Delta p/\rho}$; si intende che $2/\rho$ è inglobato nel coefficiente, in quanto ai fini dell'esercizio (fluido incomprimibile) conta la dipendenza di Δp dal quadrato della portata) da cui si ricava

$$p-p_e=\left(\frac{A_p}{C_e A_o}\right)^2\left(\frac{\tau R}{2}\right)^2\omega_m^2 \tag{15}$$

La potenza assorbita dall'utilizzatore è legata all'innalzamento del disco 2 e alla spinta del fluido attraverso l'orifizio:

$$\Pi_u=-A_p(p-p_e)v_2-Mgv_2=-\left(A_p\left(\frac{A_p}{C_e A_o}\right)^2\left(\frac{\tau R}{2}\right)^2\omega_m^2+Mg\right)\frac{\tau R}{2}\omega_m \tag{16}$$

Il bilancio di potenza dà

$$\eta C_m\omega_m+\Pi_u=0 \tag{17}$$

da cui si ricava

$$\eta(A-B\omega_m)\cancel{\omega_m}-\left(A_p\left(\frac{A_p}{C_e A_o}\right)^2\left(\frac{\tau R}{2}\right)^2\omega_m^2+Mg\right)\frac{\tau R}{2}\cancel{\omega_m}=0 \tag{18}$$

ovvero

$$A_p\left(\frac{A_p}{C_e A_o}\right)^2\left(\frac{\tau R}{2}\right)^3\omega_m^2+\eta B\omega_m+Mg\frac{\tau R}{2}-\eta A=0 \tag{19}$$

quindi la velocità di regime è

$$\omega_m=-\frac{\eta B}{2A_p\left(\frac{A_p}{C_e A_o}\right)^2\left(\frac{\tau R}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\frac{\eta B}{2A_p\left(\frac{A_p}{C_e A_o}\right)^2\left(\frac{\tau R}{2}\right)^3}\right)^2+\frac{\eta A-Mg\frac{\tau R}{2}}{A_p\left(\frac{A_p}{C_e A_o}\right)^2\left(\frac{\tau R}{2}\right)^3}} \tag{20}$$

ove si è scelta la radice positiva perché il moto sia in salita. Perché ciò avvenga, il coefficiente costante dell'equazione deve essere negativo, ovvero $Mg\frac{\tau R}{2} - \eta A < 0$; questo significa che

$$A > \frac{\tau R}{2\eta} Mg, \tag{21}$$

ovvero la coppia erogata dal motore per $\omega_m = 0$ deve essere maggiore di quella necessaria a reggere il peso del disco 2.

2.b) Stabilità della soluzione di regime. Il problema è non lineare a causa della perdita di carico turbolenta; di conseguenza è possibile studiare la condizione necessaria di stabilità statica, oppure studiare la stabilità dell'equilibrio per piccole perturbazioni.

Dall'equazione del moto a regime

$$\eta \left(A - B\omega_m\right) - \left(A_p \left(\frac{A_p}{C_e A_o}\right)^2 \left(\frac{\tau R}{2}\right)^2 \omega_m^2 + Mg\right) \frac{\tau R}{2} = 0 \tag{22}$$

derivando rispetto a ω_m si ottiene

$$-\eta B - 2A_p \left(\frac{A_p}{C_e A_o}\right)^2 \left(\frac{\tau R}{2}\right)^3 \omega_m < 0 \tag{23}$$

dato che $\omega_m > 0$. Quindi la soluzione di regime è staticamente stabile.

2.c) Accelerazione. L'energia cinetica associata all'utilizzatore è

$$T_u = \frac{1}{2} J\omega_u^2 + \frac{1}{2} J\omega_2^2 + \frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}J + \frac{MR^2}{4}\right)\omega_u^2 = \frac{1}{2} J_u \omega_u^2 \tag{24}$$

Il bilancio di potenza, considerando anche la potenza delle forze d'inerzia, dà

$$\dot{\omega}_m = \frac{\eta \left(A - B\omega_m\right) - \left(A_p \left(\frac{A_p}{C_e A_o}\right)^2 \left(\frac{\tau R}{2}\right)^2 \omega_m^2 + Mg\right) \frac{\tau R}{2}}{\eta J_m + \tau^2 \left(\frac{5}{4}J + \frac{MR^2}{4}\right)} \tag{25}$$

Qualora, a partire da condizioni di equilibrio e quindi per ω_m tale per cui $\dot{\omega}_m = 0$, improvvisamente si annullasse A, si avrebbe un'accelerazione

$$\left.\dot{\omega}_m\right|_{A=0} = -\frac{\eta B\omega_m + \left(A_p \left(\frac{A_p}{C_e A_o}\right)^2 \left(\frac{\tau R}{2}\right)^2 \omega_m^2 + Mg\right) \frac{\tau R}{2}}{\eta J_m + \tau^2 \left(\frac{5}{4}J + \frac{MR^2}{4}\right)} < 0 \tag{26}$$

Perché l'accelerazione trovata sia valida, occorre verificare che il moto si mantenga diretto. Questo richiede che la potenza fornita dal motore si mantenga positiva, ovvero $\Pi_m = (C_m - J_m\dot{\omega}_m)\omega_m > 0$, ovvero, essendo ω_m positiva, e $\dot{\omega}_m$ negativa, che la coppia d'inerzia $-J_m\dot{\omega}_m$, positiva, sia maggiore di $-B\omega_m$. Si ottiene

$$\begin{aligned} 0 <& -B\omega_m - J_m\dot{\omega}_m = -B\omega_m + J_m \frac{\eta B\omega_m + \left(A_p \left(\frac{A_p}{C_e A_o}\right)^2 \left(\frac{\tau R}{2}\right)^2 \omega_m^2 + Mg\right) \frac{\tau R}{2}}{\eta J_m + \tau^2 \left(\frac{5}{4}J + \frac{MR^2}{4}\right)} \\ &= \frac{-\cancel{B\omega_m \eta J_m} - B\omega_m \tau^2 \left(\frac{5}{4}J + \frac{MR^2}{4}\right) + \cancel{J_m \eta B\omega_m} + J_m \left(A_p \left(\frac{A_p}{C_e A_o}\right)^2 \left(\frac{\tau R}{2}\right)^2 \omega_m^2 + Mg\right) \frac{\tau R}{2}}{\eta J_m + \tau^2 \left(\frac{5}{4}J + \frac{MR^2}{4}\right)} \end{aligned} \tag{27}$$

ovvero deve verificarsi una precisa relazione tra le caratteristiche del problema perché il moto si mantenga diretto.

2.d) Tensione nelle funi. Si isoli il disco 2. Dall'equilibrio alla rotazione rispetto al suo centro si ha

$$-RT_1 + RT_2 + J\dot{\omega}_2 = 0 \tag{28}$$

Dall'equilibrio alla traslazione in direzione verticale del solo disco 2 si ha

$$T_1 + T_2 - Mg - M\dot{v}_2 - A_p(p - p_e) = 0 \tag{29}$$

Da queste due relazioni si ricavano T_1 e T_2, dato che le altre grandezze sono note.

Esercizio 3.

3.a) Equazioni del moto linearizzate. Sia x la traslazione orizzontale del carrello. Sia θ la rotazione delle aste verticali rispetto alla verticale, positiva in senso antiorario.

La componente orizzontale della posizione di A e B è pari a x. La componente orizzontale della posizione di C e D è pari a $x - 4\ell \sin\theta$, mentre la componente verticale è pari a $4\ell\cos\theta$. il corpo CD si muove di moto traslatorio.

Energia cinetica:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \vec{v}_\mathrm{A} \times \vec{v}_\mathrm{A} + \frac{1}{2} m \vec{v}_\mathrm{C} \times \vec{v}_\mathrm{C} \\ &= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \left(\dot{x} - 4\ell \cos\theta\dot{\theta} \right)^2 + \left(-4\ell\sin\theta\dot{\theta} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m \left(2\dot{x}^2 - 8\ell\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} + 16\ell^2\dot{\theta}^2 \right) \end{aligned} \tag{30}$$

Energia potenziale:

$$V = mgz_\mathrm{C} + \frac{1}{2} k \left(u - u_0\right)^2 \tag{31}$$

con $u = \sqrt{\left(4\ell\cos\theta\right)^2 + \left(3\ell + 4\ell\sin\theta\right)^2}$ e quindi $u_0 = \sqrt{\left(4\ell\right)^2 + \left(3\ell\right)^2} = 5\ell$.

Equazione in x:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} - 4m\ell\cos\theta\dot{\theta} \tag{32}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 2m\ddot{x} - 4m\ell\cos\theta\ddot{\theta} + 4m\ell\sin\theta\dot{\theta}^2 \tag{33}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{35}$$

L'equazione del moto è

$$2m\ddot{x} - 4m\ell\cos\theta\ddot{\theta} + 4m\ell\sin\theta\dot{\theta}^2 = 0 \tag{36}$$

Equazione in θ:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = -4m\ell\cos\theta\dot{x} + 16m\ell^2\dot{\theta} \tag{37}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = -4m\ell\cos\theta\ddot{x} + 4m\ell\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} + 16m\ell^2\ddot{\theta} \tag{38}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 4m\ell\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} \tag{39}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mg\frac{\partial z_\mathrm{C}}{\partial \theta} + k\left(u - u_0\right)\frac{\partial u}{\partial \theta} = -4mg\ell\sin\theta + k\left(u - 5\ell\right)\frac{12\ell^2}{u}\cos\theta \tag{40}$$

L'equazione del moto è

$$-4m\ell\cos\theta\ddot{x}+16m\ell^2\ddot{\theta}-4mg\ell\sin\theta+k\,(u-5\ell)\,\frac{12\ell^2}{u}\cos\theta=0 \tag{41}$$

La soluzione di figura, $\theta=0$, $\forall x$ è soluzione di equilibrio.

La prima equazione, linearizzata in corrispondenza della soluzione di equilibrio statico, dà

$$2m\ddot{x}-4m\ell\ddot{\theta}=0 \tag{42}$$

La seconda equazione dà

$$-4m\ell\ddot{x}+16m\ell^2\ddot{\theta}-4mg\ell\theta+k\left(\frac{12\ell}{5}\right)^2\theta=0 \tag{43}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} 2m & -4m\ell \\ -4m\ell & 16m\ell^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k\left(\frac{12\ell}{5}\right)^2-4mg\ell \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{44}$$

3.b) Stabilità. La matrice di rigidezza è singolare; il problema ammette un modo rigido. Perché l'altro modo sia staticamente stabile occorre che

$$k\left(\frac{12\ell}{5}\right)^2-4mg\ell>0 \tag{45}$$

ovvero

$$k>\frac{25}{36}\frac{mg}{\ell} \tag{46}$$

3.c) Autovalori e autovettori. Con la sostituzione proposta si ha

$$\begin{bmatrix} 2m & -4m\ell \\ -4m\ell & 16m\ell^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 32mg\ell \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{47}$$

Si definisca ora $z=-4\ell\theta$ e si divida per m; si ottiene

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2g/\ell \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{48}$$

Gli autovalori si trovano da

$$\begin{vmatrix} 2s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2+2g/\ell \end{vmatrix}=2s^4+4g/\ell s^2-s^4=s^2(s^2+4g/\ell)=0 \tag{49}$$

e sono $s^2=0$ e $s^2=-4g/\ell$.

Gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix}_{s^2=0}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix}_{s^2=-4g/\ell}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \tag{50}$$

ovvero

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}_{s^2=0}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}_{s^2=-4g/\ell}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1/(2\ell) \end{Bmatrix} \tag{51}$$