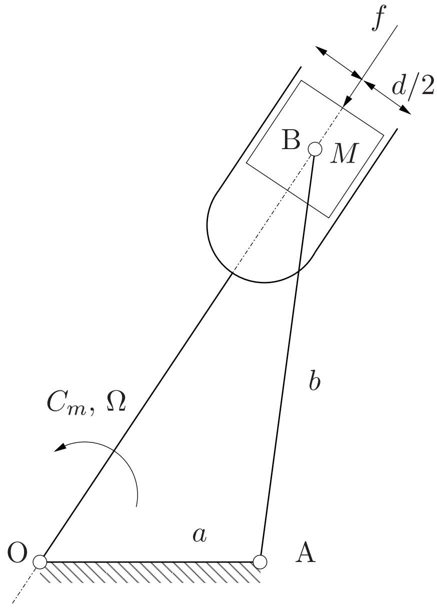
DINAMICA DI SISTEMI AEROSPAZIALI

Tema d'esame 02 - 02 - 2015

Esercizio 1. Il meccanismo in figura è posto in un piano verticale. Al telaio, mediante la cerniera in O è collegata una guida di massa trascurabile; mediante la cerniera in A, posta a distanza a dal punto O, è collegata una biella di massa trascurabile e lunghezza $b > a$. Un corpo di massa M e inerzia baricentrica J scorre senza attrito nella guida, ed è collegato in B alla biella mediante una cerniera posta nel baricentro del corpo. Al corpo è applicata una forza f parallela alla guida. La guida è mantenuta in rotazione a velocità angolare costante Ω. **Si consideri il sistema nell'istante in cui la guida è perpendicolare al segmento O–A.** Determinare:

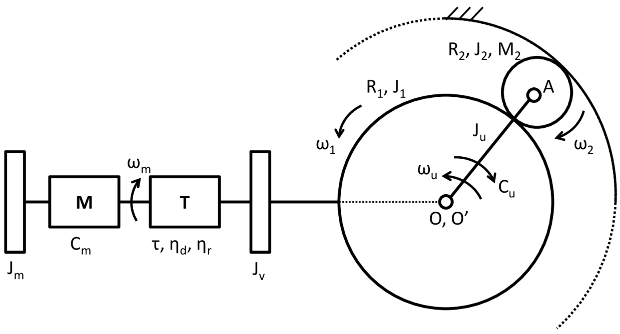


1.a) la velocità e l'accelerazione lineare ed angolare del corpo di massa M nella condizione assegnata;

1.b) la coppia C_m che occorre applicare alla guida per mantenere la condizione assegnata;

1.c) le forze scambiate alle cerniere in O e A.

Esercizio 2. Un motore M ha inerzia J_m e fornisce una coppia motrice $C_m = C\theta_0$ ($C > 0$) proporzionale ad un parametro θ_0. Attraverso una trasmissione T con rapporto τ e rendimenti η_d e η_r muove un disco di raggio R_1 e inerzia J_1, incernierato in O. Tra tale disco e una guida circolare fissa rotola senza strisciare un satellite di raggio R_2, massa M_2 e inerzia J_2. Tra la cerniera O', coincidente con O, e il centro A del secondo disco si trova un'asta portatreno di inerzia J_u rispetto al baricentro, posto in O'. Sull'asta portatreno agisce una coppia resistente $C_u = \omega_u|\omega_u|(A + B\theta_0)$ ($A > 0$ e $B > 0$). Fra la trasmissione e il disco 1 è presente un volano di inerzia J_v. Il moto di dischi e portatreno avviene in un piano orizzontale.

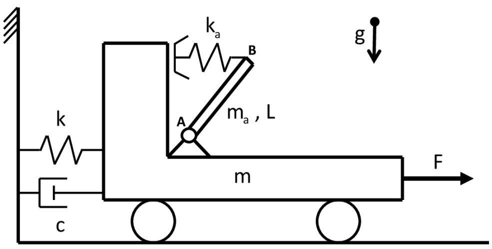


2.a) Determinare il rapporto di trasmissione tra l'albero del motore e l'asta portatreno O–A;

2.b) determinare il valore del parametro θ_0 per il quale la velocità a regime dell'asta portatreno è $\omega_u = \Omega$ e valutare la stabilità della condizione di funzionamento;

2.c) dimensionare il volano J_v perché, qualora la coppia motrice venga a mancare nella condizione al punto (2.b) ($C = 0$), l'accelerazione angolare dell'asta portatreno sia in modulo minore di un valore assegnato.

Esercizio 3. Un carrello di massa m e rulli di inerzia trascurabile è collegato a terra da una molla di rigidezza k e uno smorzatore di caratteristica c; porta incernierata in A un'asta di massa uniforme m_a e lunghezza L, al cui estremo libero B è collegata una molla di rigidezza k_a che agisce tra asta e carrello. Il carrello è forzato da una forza F. Il sistema è posto nel piano verticale.



3.a) Scrivere le equazioni del moto linearizzate rispetto alla configurazione con asta verticale, e determinare la condizione sulla rigidezza k_a per la quale la configurazione di equilibrio è stabile;

3.b) determinare la risposta al forzamento armonico $F = F_0 e^{j\Omega t}$;

3.c) determinare le reazioni vincolari scambiate tra asta e carrello nelle condizioni al punto (3.b);

3.d) determinare la relazione tra k_a e m_a affinché il carrello stia fermo nelle condizioni al punto (3.b).

N.B.: si definisca e si commenti opportunamente qualsivoglia dato ritenuto mancante.

Traccia di soluzione

Esercizio 1

1.a) Moto del corpo in B. Il punto B si muove lungo una traiettoria circolare di raggio b con centro in A, quindi la sua traiettoria è nota a partire dal moto della biella A–B. Il corpo ruota con velocità angolare uguale a quella della guida. Occorre quindi determinare il moto della biella, mentre quello della guida è imposto.

Sia β l'angolo di cui ruota la biella A–B rispetto all'orizzontale; sia γ l'angolo di cui ruota la guida O–B rispetto all'orizzontale. Sia x la distanza O–B. Si ha

$$\text{O–A} + \text{A–B} + \text{B–O} = 0 \tag{1}$$

ovvero

$$a + b\mathrm{e}^{j\beta} - x\mathrm{e}^{j\gamma} = 0 \tag{2}$$

da cui

$$a + b\cos\beta - x\cos\gamma = 0 \tag{3a}$$
$$b\sin\beta - x\sin\gamma = 0 \tag{3b}$$

Nella condizione richiesta $\gamma = \pi/2$, quindi

$$a + b\cos\beta = 0 \tag{4a}$$
$$b\sin\beta - x = 0 \tag{4b}$$

ovvero $\cos\beta = -a/b$ e $x = b\sin\beta$, ovvero $x = \sqrt{b^2 - a^2}$.

La derivata dell'equazione di chiusura dà

$$bj\dot\beta\mathrm{e}^{j\beta} - \dot x\mathrm{e}^{j\gamma} - xj\dot\gamma\mathrm{e}^{j\gamma} = 0 \tag{5}$$

da cui

$$-b\dot\beta\sin\beta - \dot x\cos\gamma + x\dot\gamma\sin\gamma = 0 \tag{6a}$$
$$b\dot\beta\cos\beta - \dot x\sin\gamma - x\dot\gamma\cos\gamma = 0 \tag{6b}$$

Nella condizione richiesta $\dot\gamma = \Omega$, quindi

$$-b\dot\beta\sin\beta + x\Omega = 0 \tag{7a}$$
$$b\dot\beta\cos\beta - \dot x = 0 \tag{7b}$$

ovvero $\dot\beta = \Omega$ e $\dot x = -a\Omega$.

La derivata seconda dell'equazione di chiusura dà

$$bj\ddot\beta\mathrm{e}^{j\beta} - b\dot\beta^2\mathrm{e}^{j\beta} - \ddot x\mathrm{e}^{j\gamma} - 2\dot xj\dot\gamma\mathrm{e}^{j\gamma} - xj\ddot\gamma\mathrm{e}^{j\gamma} + x\dot\gamma^2\mathrm{e}^{j\gamma} = 0 \tag{8}$$

da cui

$$-b\ddot\beta\sin\beta - b\dot\beta^2\cos\beta - \ddot x\cos\gamma + 2\dot x\dot\gamma\sin\gamma + x\ddot\gamma\sin\gamma + x\dot\gamma^2\cos\gamma = 0 \tag{9a}$$
$$b\ddot\beta\cos\beta - b\dot\beta^2\sin\beta - \ddot x\sin\gamma - 2\dot x\dot\gamma\cos\gamma - x\ddot\gamma\cos\gamma + x\dot\gamma^2\sin\gamma = 0 \tag{9b}$$

Nella condizione richiesta $\ddot\gamma = 0$, quindi

$$-b\ddot\beta\sin\beta - b\dot\beta^2\cos\beta + 2\dot x\Omega = 0 \tag{10a}$$
$$b\ddot\beta\cos\beta - b\dot\beta^2\sin\beta - \ddot x + x\Omega^2 = 0 \tag{10b}$$

ovvero $\ddot\beta = -\Omega^2 a/\sqrt{b^2 - a^2}$ e $\ddot x = \Omega^2 a^2/\sqrt{b^2 - a^2}$.

1.b) Coppia motrice. Si consideri il teorema dell'energia cinetica. L'energia cinetica è

$$E_c = \frac{1}{2}M(b\dot{\beta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\gamma}^2 \tag{11}$$

La potenza delle forze attive a meno di quelle d'inerzia è

$$\Pi = C_m\dot{\gamma} - f\dot{x} - Mgb\dot{\beta}\cos\beta \tag{12}$$

Si ricava quindi

$$Mb^2\dot{\beta}\ddot{\beta} = C_m\dot{\gamma} - f\dot{x} - Mgb\dot{\beta}\cos\beta \tag{13}$$

Nella condizione richiesta si ha

$$-Mb^2\Omega^3\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}} = C_m\Omega + fa\Omega + Mga\Omega \tag{14}$$

da cui

$$C_m = -Mb^2\Omega^2\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}} - fa - Mga \tag{15}$$

1.c) Reazioni vincolari in O e A. Dal diagramma di corpo libero della sola guida nella condizione di riferimento si nota che in direzione verticale compare solo la componente verticale della forza scambiata in O, V_{O}, che quindi deve essere nulla.

Dall'equilibrio alla traslazione verticale di tutto il sistema,

$$V_{\mathrm{A}} - Mg - f + Mb\dot{\beta}^2\sin\beta - Mb\ddot{\beta}\cos\beta = 0 \tag{16}$$

si ricava la componente verticale della forza scambiata in A.

Siccome il corpo A–B è una biella, è caricata solo assialmente, per cui la componente orizzontale H_{A} è tale da far sì che la forza scambiata in A, F_{A}, sia allineata con l'asse della biella, quindi

$$F_{\mathrm{A}} = \frac{V_{\mathrm{A}}}{\sin\beta}. \tag{17}$$

Dall'equilibrio alla traslazione in direzione orizzontale di tutto il sistema,

$$H_{\mathrm{O}} + H_{\mathrm{A}} + Mb\dot{\beta}^2\cos\beta + Mb\ddot{\beta}\sin\beta = 0, \tag{18}$$

nota $H_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{A}}/\tan\beta$, si ricava la componente orizzontale della forza scambiata in O,

Esercizio 2

2.a) Rapporto di trasmissione. La velocità tangenziale del disco 1 nel punto di contatto è $R_1\omega_1$. La velocità tangenziale del disco 2 nel punto di contatto è $2R_2\omega_2$. Tali velocità devono essere uguali; si ricava quindi

$$\omega_2 = \frac{R_1}{2R_2}\omega_1 \tag{19}$$

La velocità dell'estremo A del portatreno è $(R_1 + R_2)\omega_u$. La velocità del centro del disco 2 è $R_2\omega_2$. Tali velocità devono essere uguali; si ricava quindi

$$\omega_u = \frac{R_2}{R_1+R_2}\omega_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{R_1}{2R_2}\omega_1 = \frac{R_1}{2(R_1+R_2)}\omega_1 \tag{20}$$

La velocità in uscita dalla trasmissione è $\omega_1 = \tau\omega_m$, quindi la relazione cercata è

$$\tau' = \frac{\omega_u}{\omega_m} = \frac{R_1}{2(R_1+R_2)}\tau \tag{21}$$

2.b) Soluzione di regime. Si ipotizza moto diretto. La potenza uscente dal motore è $C_m\omega_m = C\theta_0\omega_m$. La potenza uscente dall'utilizzatore è $C_u\omega_u = -|\omega_u|^3(A+B\theta_0)$. Il bilancio tra potenza uscente dalla trasmissione e potenza uscente dall'utilizzatore dà

$$0 = \eta_d C\theta_0\omega_m - |\omega_u|^3(A + B\theta_0) \tag{22}$$

Considerando il rapporto di trasmissione si ottiene

$$0 = \eta_d C\theta_0\omega_m - {\tau'}^3|\omega_m|^3(A + B\theta_0) \tag{23}$$

Ipotizzando velocità $\omega_m > 0$ si ottiene

$$0 = \eta_d C\theta_0 - {\tau'}^3\omega_m^2(A + B\theta_0) \tag{24}$$

da cui è immediato ricavare

$$\theta_0 = \frac{{\tau'}^3\omega_m^2 A}{\eta_d C - {\tau'}^3\omega_m^2 B}. \tag{25}$$

Avendo cura di sostituire

$$\omega_m = \Omega/\tau', \tag{26}$$

si ricava

$$\theta_0 = \frac{\tau'\Omega^2 A}{\eta_d C - \tau'\Omega^2 B}. \tag{27}$$

Con le ipotesi fatte, la soluzione è positiva se il denominatore è positivo; deve quindi valere la relazione

$$\Omega < \sqrt{\frac{\eta_d C}{\tau' B}} \tag{28}$$

oltre a $\Omega \geq 0$.

La stabilità statica della generica soluzione si ricava dallo studio del segno della derivata della parte statica dell'equazione del moto rispetto alla velocità angolare ω_m,

$$\frac{\partial}{\partial\omega_m}\Big(\eta_d C\theta_0 - {\tau'}^3\omega_m^2(A + B\theta_0)\Big) = -2{\tau'}^3\omega_m(A + B\theta_0). \tag{29}$$

Siccome tutti i coefficienti sono positivi, tale derivata è negativa, per cui la condizione di equilibrio è staticamente stabile (si ricorda che questa è soltanto una condizione necessaria ma non sufficiente).

2.c) Dimensionamento del volano. L'inerzia del motore è J_m. L'inerzia complessiva dell'utilizzatore, ridotta alla rotazione del portatreno, si ricava dalla scrittura dell'energia cinetica di tutti gli elementi a valle della trasmissione, ovvero

$$\begin{aligned} E_{c_u} &= \frac{1}{2}J_v\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}M_2(R_2\omega_2)^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}J_u\omega_u^2 \\ &= \frac{1}{2}\left((J_v + J_1)\left(\frac{2\,(R_1 + R_2)}{R_1}\right)^2 + \left(M_2R_2^2 + J_2\right)\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right)^2 + J_u\right)\omega_1^2 = \frac{1}{2}J_u'\omega_1^2 \end{aligned} \tag{30}$$

Si ipotizzi ora che il moto rimanga diretto; il bilancio di potenza a valle della trasmissione dal lato utilizzatore dà

$$0 = \eta_d\left(C_m - J_m\dot{\omega}_m\right)\omega_m + \left(C_u - J_u'\dot{\omega}_u\right)\omega_u \tag{31}$$

Considerando la relazione $\omega_u = \tau'\omega_m$ si ricava

$$\dot{\omega}_m = \frac{\eta_d C_m + \tau' C_u}{\eta J_d + {\tau'}^2 J_u'} \tag{32}$$

e, nelle condizioni date, ovvero $\omega_u = \Omega$, θ_0 calcolato in precedenza, e $C = 0$, si ottiene

$$\dot{\omega}_m = -\frac{\tau'\Omega^2(A + B\theta_0)}{\eta J_d + \tau'^2 J'_u} \tag{33}$$

ovvero una decelerazione. Siccome l'accelerazione è negativa, le forze d'inerzia stanno fornendo potenza. Ne consegue che la potenza dal motore alla trasmissione è positiva. Occorre verificare se la potenza dall'utilizzatore alla trasmissione è negativa per confermare la condizione di moto diretto. Si ottiene

$$\begin{aligned}
\Pi_u &= \left(C_u - J'_u\dot{\omega}_u\right)\omega_u \\
&= \left(-\Omega^2(A + B\theta_0) + J'_u\tau'\frac{\tau'\Omega^2(A + B\theta_0)}{\eta J_d + \tau'^2 J'_u}\right)\omega_u \\
&= \left(\frac{-\left(\eta J_d + \tau'^2 J'_u\right)\Omega^2(A + B\theta_0) + \tau'^2 J'_u\Omega^2(A + B\theta_0)}{\eta J_d + \tau'^2 J'_u}\right)\omega_u \\
&= -\left(\frac{\eta J_d\Omega^2(A + B\theta_0)}{\eta J_d + \tau'^2 J'_u}\right)\omega_u < 0
\end{aligned} \tag{34}$$

e quindi il moto si conferma diretto.

Imponendo che il modulo dell'accelerazione sia minore del valore dato, posto pari a $\dot{\Omega}_{\max}$, si ha

$$\dot{\Omega}_{\max} > \frac{\tau'\Omega^2(A + B\theta_0)}{\eta J_d + \tau'^2 J'_u} \tag{35}$$

Da questa relazione è possibile (ancorché involuto) esplicitare la diseguaglianza in funzione di J_v, che è contenuto in J'_u. Si ottiene

$$\tau'^2 J'_u > \frac{\tau'\Omega^2(A + B\theta_0)}{\dot{\Omega}_{\max}} - \eta J_d \tag{36}$$

e da qui via via fino ad ottenere una condizione in J_v; a tale condizione va affiancata la condizione di realizzabilità del volano, ovvero $J_v \geq 0$.

Esercizio 3

3.a) Equazioni linearizzate del moto. La posizione del carrello è x. La rotazione dell'asta (come in figura) è θ. La posizione del baricentro dell'asta è $\vec{P}_G = \{x + L\sin\theta/2; L\cos\theta/2\}$.

L'energia cinetica è

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_aL^2}{12}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_a\left(\left(\dot{x} + \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)^2 + \left(-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(m + m_a\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_aL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_aL\cos\theta\dot{x}\dot{\theta}
\end{aligned} \tag{37}$$

L'energia potenziale è

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k_a\left(L\sin\theta\right)^2 + m_ag\frac{L}{2}\cos\theta \tag{38}$$

Il lavoro virtuale delle forze esterne è

$$\delta\mathcal{L} = \delta x \cdot F - \delta xc\dot{x} \tag{39}$$

Si ipotizzi inizialmente forza F nulla. Il gradiente dell'energia potenziale dà

$$kx = 0 \tag{40a}$$

$$k_aL^2\sin\theta\cos\theta - m_ag\frac{L}{2}\sin\theta = 0 \tag{40b}$$

La soluzione $x = 0$, $\theta = 0$ è di equilibrio; perché sia staticamente stabile la derivata seconda di E_p rispetto a θ deve essere positiva; quindi

$$\left[k_a L^2 \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta \right) - m_a g \frac{L}{2} \cos\theta \right]_0 > 0 \tag{41}$$

implica

$$k_a > \frac{m_a g}{2L} \tag{42}$$

Si valuti ora l'energia cinetica nella configurazione di equilibrio statico stabile appena verificata; si ottiene

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \left(m + m_a \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_a L^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_a L \dot{x} \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{cc} m + m_a & m_a L/2 \\ m_a L/2 & m_a L^2/3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{43}$$

Le equazioni del moto linearizzate sono quindi

$$\left[\begin{array}{cc} m + m_a & m_a L/2 \\ m_a L/2 & m_a L^2/3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} c & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} k & 0 \\ 0 & k_a L^2 - m_a g L/2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} x \\ \theta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F \\ 0 \end{array} \right\} \tag{44}$$

3.b) Risposta a forzamento armonico. Se $F = F_0 \mathrm{e}^{j\Omega t}$ allora la risposta ha la stessa forma, $x = x_0 \mathrm{e}^{j\Omega t}$ e $\theta = \theta_0 \mathrm{e}^{j\Omega t}$, con x_0 e θ_0 costanti complesse.

Si ha

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} x_0 \\ \theta_0 \end{array} \right\} &= \left(-\Omega^2 \left[\begin{array}{cc} m + m_a & m_a L/2 \\ m_a L/2 & m_a L^2/3 \end{array} \right] + j\Omega \left[\begin{array}{cc} c & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} k & 0 \\ 0 & k_a L^2 - m_a g L/2 \end{array} \right] \right)^{-1} \left\{ \begin{array}{c} F_0 \\ 0 \end{array} \right\} \\ &= \left[\begin{array}{cc} -\Omega^2 \left(m + m_a \right) + j\Omega c + k & -\Omega^2 m_a L/2 \\ -\Omega^2 m_a L/2 & -\Omega^2 m_a L^2/3 + k_a L^2 - m_a g L/2 \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} F_0 \\ 0 \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{H}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\} F_0, \end{aligned} \tag{45}$$

la cui soluzione può essere ricavata in modo semplice.

3.c) Reazioni vincolari. Si isoli l'asta. Dall'equilibrio alla traslazione verticale, si verifica che la componente verticale della forza scambiata con il carrello, V, è pari al peso dell'asta, $m_a g$.

Si isoli ora il carrello. Dall'equilibrio alla traslazione in direzione orizzontale

$$-kx - c\dot{x} - m\ddot{x} + F + k_a L\theta - H = 0 \tag{46}$$

si ottiene la componente orizzontale della forza scambiata con l'asta, $H = H_0 \mathrm{e}^{j\Omega t}$, ovvero

$$H_0 = -\left(k + j\Omega c - \Omega^2 m \right) x_0 + k_a L \theta_0 + F_0, \tag{47}$$

ove x_0 e θ_0 proporzionali a F_0 sono stati calcolati al punto precedente.

3.d) Assorbitore dinamico. È facile verificare che la soluzione al punto (3.b) comporta uno spostamento del carrello proporzionale all'elemento (2, 2) della matrice che occorre invertire per risolvere il problema della risposta, quindi

$$x_0 = \frac{-\Omega^2 m_a L^2/3 + k_a L^2 - m_a g L/2}{\det(\mathbf{H})} F_0 \tag{48}$$

Perché lo spostamento x_0 sia nullo deve quindi annullarsi il numeratore dell'espressione sopra riportata, ovvero

$$\frac{k_a}{m_a} = \frac{\Omega^2}{3} + \frac{g}{2L} \tag{49}$$

Si noti che in questo caso la reazione scambiata fra asta e carrello si riduce a $F + k_a\theta$, in quanto lo spostamento del carrello è nullo e quindi tali sono le forze d'inerzia, viscose ed elastiche che agiscono su di esso.