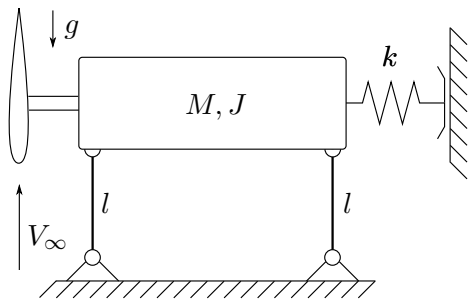


DINAMICA DI SISTEMI AEROSPAZIALI

Tema d'esame 03 - 02 - 2016

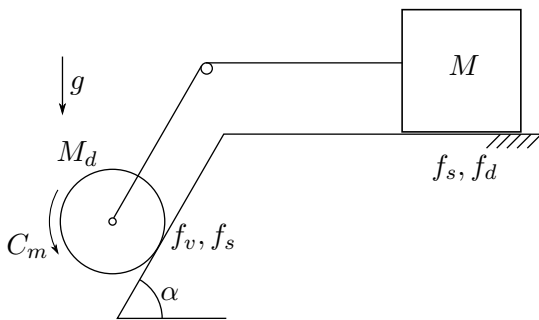


Esercizio 1. Un corpo di massa M e momento d'inerzia baricentrico J è collegato al terreno da due bielle di lunghezza l e massa trascurabile, e da una molla di rigidezza k . Il problema è posto in un piano verticale. Ad un estremo è collegata un profilo simmetrico di area S , investita da un vento asintotico V_∞ verticale.

- 1.a) Trascurando per il momento la superficie aerodinamica, si scriva l'equazione del moto del sistema, si determini la rigidezza della molla affinché la configurazione di equilibrio statico a bielle verticali sia stabile, e si determini la frequenza caratteristica del sistema dopo aver linearizzato l'equazione del moto rispetto alla configurazione a bielle verticali;
- 1.b) considerando un modello stazionario linearizzato per piccole perturbazioni dell'angolo di incidenza attorno a zero delle forze aerodinamiche, data la velocità asintotica V_∞ e la densità dell'aria e assumendo $c_D = c_D(0)$ e $c_L = 2\pi\alpha$, si dimensioni la superficie S perché il fattore di smorzamento ξ del sistema abbia un valore assegnato $\hat{\xi}$.

Esercizio 2. Un motore M ha inerzia J_m e fornisce una coppia motrice $C_m = A - B\omega_m$ ($A > 0$, $B > 0$). Attraverso una trasmissione T con rapporto τ e rendimento η muove un'elica di inerzia J_u che assorbe una coppia $C_u = C_0 + C_2\omega_u^2$ ($C_0 > 0$, $C_2 > 0$).

- 2.a) Determinare la velocità di funzionamento a regime e studiare la stabilità di tale condizione;
- 2.b) dimensionare l'inerzia J_u dell'elica perché in caso di avaria al motore (ovvero in caso sia improvvisamente $A = 0$) il modulo della decelerazione istantanea, $|\dot{\omega}_u|$, sia inferiore ad un valore assegnato.



Esercizio 3. Il sistema in figura è posto nel piano verticale. Una massa M scorre su di un piano orizzontale. Un disco di massa M_d , momento d'inerzia baricentrico J_d e raggio R è connesso alla massa tramite una fune inestensibile nel suo centro e rotola senza strisciare su di un piano inclinato di un angolo α . Il contatto disco-guida è caratterizzato da coefficiente di attrito statico f_s , e il disco stesso presenta resistenza al rotolamento caratterizzata dal coefficiente f_v . Il contatto massa-guida è invece governato dai coefficienti f_s e f_d , rispettivamente di attrito statico e dinamico. Si ha

$f_s > f_d$. Una puleggia di massa trascurabile assicura che la fune sia sempre diretta come le guide.

- 3.a) Determinare la coppia C_m da applicare al disco perchè questo scenda a velocità costante lungo la guida;
- 3.b) determinare l'accelerazione del centro del disco allo spunto, supponendo che sia applicata una coppia sufficiente ad avviare il moto, e verificare nelle stesse condizioni l'aderenza del disco alla guida.

Esercizio 4. Un motore elettrico in corrente continua di inerzia J_m , caratteristica K , induttanza L e resistenza di armatura R aziona un utilizzatore che oppone una coppia resistente $C_u = C_0 + C_1\Omega$.

- 4.a) Utilizzando come variabili di stato la velocità angolare e la corrente elettrica, scrivere agli stati le equazioni della dinamica del sistema, trovare la condizione di funzionamento di regime per una data tensione di alimentazione e impostarne lo studio della stabilità;
- 4.b) approssimare il problema mediante residualizzazione statica della corrente elettrica, e valutare la stabilità del modello approssimato.

N.B.: si definisca e si commenti opportunamente qualsivoglia dato ritenuto mancante.

N.B. 2: si ponga speciale attenzione a indicare le condizioni per cui le soluzioni considerate siano realizzabili, ogniqualvolta venga fatta un'ipotesi (e.g. moto diretto/retrogrado, quantità note, stabilità statica o dinamica, ecc...)

Traccia di soluzione

Esercizio 1

1.a) Equazione di moto, stabilità e frequenza caratteristica

Si assuma come coordinata libera l'angolo θ formato dalle bielle con la verticale, positivo in senso antiorario. L'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema (senza considerare il profilo alare) sono:

$$E_c = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 \quad (1a)$$

$$V = \frac{1}{2}kl^2 \sin^2 \theta + Mgl \cos \theta \quad (1b)$$

quindi l'equazione di moto non lineare risulta

$$Ml^2\ddot{\theta} + kl^2 \sin \theta \cos \theta - Mgl \sin \theta = 0 \quad (2)$$

L'equilibrio statico, dal momento che il sistema è conservativo, è retto da $\left. \frac{dV}{d\theta} \right|_{\theta_0} = 0$:

$$kl^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - Mgl \sin \theta_0 = 0 \quad (3)$$

chiaramente verificata per $\theta_0 = 0$. La stabilità dell'equilibrio è garantita se $k^*(\theta_0) = \left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta_0} > 0$:

$$kl^2 \cos(2\theta_0) - Mgl \cos \theta_0 > 0 \quad (4)$$

ovvero se

$$k > \frac{Mg}{l} \quad (5)$$

L'equazione di moto linearizzata è

$$Ml^2\Delta\ddot{\theta} + (kl^2 - Mgl) \Delta\theta = Ml^2\ddot{\theta} + (kl^2 - Mgl) \theta = 0 \quad (6)$$

La pulsazione propria del sistema è $\omega_n = \sqrt{\frac{kl^2 - Mgl}{Ml^2}} = \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{g}{l}}$.

1.b) Superficie del profilo per ottenere smorzamento assegnato

Le componenti della forza aerodinamica che agisce sul profilo, nel modello stazionario linearizzato, sono

$$L = \frac{1}{2}\rho SV_\infty^2 \left. \frac{dc_L}{d\alpha} \right|_0 \alpha \quad (7a)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho SV_\infty^2 c_D(0) \quad (7b)$$

e sono dirette, rispettivamente, in direzione perpendicolare e in direzione concorde alla velocità relativa V_r , di componenti (nel modello linearizzato) V_∞ e $-l\dot{\theta}$. L'angolo di attacco sarà quindi

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{-l\dot{\theta}}{V_\infty} \right) \approx \frac{-l\dot{\theta}}{V_\infty} \quad (8)$$

Sostituendo l'espressione di α nell'espressione della portanza si ottiene

$$L = -\frac{1}{2}\rho SV_\infty \left. \frac{dc_L}{d\alpha} \right|_0 l\dot{\theta} \quad (9)$$

A questo punto è possibile valutare il lavoro virtuale compiuto da portanza e resistenza

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_a &= (L \cos \alpha + D \sin \alpha) l \cos \theta \delta \theta - (-L \sin \alpha + D \cos \alpha) l \sin \theta \delta \theta \\
&\approx (L + D \alpha) l \delta \theta - (-L \alpha + D) l \theta \delta \theta \\
&= \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S [2\pi \alpha + c_D(0) \alpha + 2\pi \alpha^2 \theta - c_D(0) \theta] l \delta \theta \\
&= \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S \left[-(2\pi + c_D(0)) \frac{l \dot{\theta}}{V_\infty} - c_D(0) \theta \right] l \delta \theta
\end{aligned} \tag{10}$$

Quindi la componente lagrangiana corrispondente è

$$Q = -\frac{1}{2} \rho S V_\infty (2\pi + c_D(0)) l^2 \dot{\theta} - \frac{1}{2} \rho S V_\infty^2 c_D(0) l \theta \tag{11}$$

L'equazione linearizzata di moto, considerate anche le forze aerodinamiche, diventa

$$M l^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \rho S V_\infty (2\pi + c_D(0)) l^2 \dot{\theta} + \left(k l^2 - M g l + \frac{1}{2} \rho S V_\infty^2 c_D(0) l \right) \theta = 0 \tag{12}$$

dividendo per $M l^2$ si ottiene

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\rho}{M} S V_\infty (2\pi + c_D(0)) \dot{\theta} + \left(\frac{k}{M} - \frac{g}{l} + \frac{1}{2} \frac{\rho S}{M l} V_\infty^2 c_D(0) \right) \theta = 0 \tag{13}$$

che può essere riscritta come

$$\ddot{\theta} + 2\xi \omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \tag{14}$$

a patto di ridefinire

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{g}{l} + \frac{1}{2} \frac{\rho S}{M l} V_\infty^2 c_D(0)} \tag{15}$$

Confrontando i termini si ottiene subito

$$2\xi \omega_n = \frac{1}{2} \frac{\rho}{M} S V_\infty (2\pi + c_D(0)) \tag{16}$$

e quindi la superficie richiesta è

$$S = \frac{4\omega_n M}{\rho V_\infty (2\pi + c_D(0))} \hat{\xi} \tag{17}$$

Dato che $c_D(0)$ è tipicamente molto piccolo (sicuramente rispetto a 2π , ma è ragionevole aspettarsi che il suo apporto a ω_n sia trascurabile, ai fini della soluzione del compito si sarebbe potuto ritenere lecito il trascurare la resistenza D fin dall'inizio.

Esercizio 2

2.a) Velocità di funzionamento a regime e stabilità

Le potenze lato motore e lato utilizzatore sono

$$W_m = C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m \tag{18a}$$

$$W_u = -C_u \omega_u - J_u \omega_u \dot{\omega}_u = -\tau C_u \omega_m - \tau^2 J_u \dot{\omega}_m \omega_m \tag{18b}$$

A regime, il modo è diretto, dal momento che l'elica assorbe sicuramente potenza. L'equazione di moto è quindi

$$\eta (A - B \omega_m - J_m \dot{\omega}_m) - (C_0 + C_2 \tau^2 \omega_m^2) \tau - J_u \tau^2 \dot{\omega}_m = 0 \tag{19}$$

che a regime diventa

$$\eta(A - B\omega_{m0}) - (C_0 + C_2\tau^2\omega_{m0}^2)\tau = 0 \quad (20)$$

Risolvendo rispetto a ω_{m0} si ottiene

$$\omega_{m0} = \frac{-\eta B \pm \sqrt{(\eta B)^2 - 4\tau^3 C_2 (\tau C_0 - \eta A)}}{2\tau^3 C_2} \quad (21)$$

di cui risulta accettabile la soluzione positiva. Perchè il radicando sia positivo deve inoltre essere $4\tau^3 C_2 (\tau C_0 - \eta A) < 0$ o $A > \tau C_0 / \eta$.

Per valutare la stabilità si linearizza l'equazione di moto nell'intorno della posizione di equilibrio

$$\eta(A - B\omega_m - J_m \dot{\omega}_m) - (\tau C_0 + C_2\tau^3\omega_{m0}^2 + 2\tau^2\omega_{m0}\Delta\omega_m) - J_u\tau^2\dot{\omega}_m = 0 \quad (22)$$

che scritta in funzione della perturbazione $\Delta\omega_m$ diventa

$$(\eta J_m + \tau^2 J_u) \Delta\dot{\omega}_m + (\eta B + 2C_2\tau^3\omega_{m0}) \Delta\omega_m = 0 \quad (23)$$

la cui soluzione tipo è $\Delta\omega_m = Ae^{\lambda t}$, stabile se $\lambda < 0$, ovvero se

$$\lambda = -\frac{\eta B + 2C_2\tau^3\omega_{m0}}{\eta J_m + \tau^2 J_u} < 0 \quad (24)$$

che risulta sempre vera nel caso in esame, dal momento che tutti i parametri sono positivi¹.

2.b) Momento d'inerzia utilizzatore

Nell'istante in cui A diventa nullo, il moto del sistema è retto da

$$\eta(-B\omega_{m0} - J_m \dot{\omega}_m) - (C_0 + C_2\tau^2\omega_{m0}^2)\tau - J_u\tau^2\dot{\omega}_{m0} = 0 \quad (25)$$

valida nell'ipotesi in cui il moto rimanga diretto, ovvero nel caso in cui sia $W_m = -B\omega_{m0}^2 - J_m\dot{\omega}_m\omega_{m0} > 0$. La condizione richiesta è

$$|\dot{\omega}_u| = \tau |\dot{\omega}_m| < |\dot{\Omega}| \quad (26)$$

con $\dot{\Omega}$ valore assegnato. Dalla (25) si ottiene

$$|\dot{\omega}_m| = \left| \frac{-\eta B\omega_{m0} - \tau(C_0 + \tau^2 C_2\omega_{m0}^2)}{\eta J_m + \tau^2 J_u} \right| \quad (27)$$

e quindi

$$\left| \frac{-\eta B\omega_{m0} - \tau(C_0 + \tau^2 C_2\omega_{m0}^2)}{\eta J_m + \tau^2 J_u} \right| < \frac{1}{\tau} |\dot{\Omega}| \quad (28)$$

che risolta rispetto a J_u porta a

$$J_u > \frac{1}{|\dot{\Omega}|} \left(\frac{\eta B\omega_{m0}}{\tau} + C_0 + \tau^2 C_2\omega_{m0}^2 \right) - \frac{\eta J_m}{\tau^2} \quad (29)$$

Nel caso invece in cui il moto diventi retrogrado, l'equazione di moto è

$$-B\omega_{m0} - J_m \dot{\omega}_m - \eta((C_0 + C_2\tau^2\omega_{m0}^2)\tau - J_u\tau^2\dot{\omega}_{m0}) = 0 \quad (30)$$

l'accelerazione angolare del motore vale, questa volta

$$|\dot{\omega}_m| = \left| \frac{-B\omega_{m0} - \eta(C_0 + \tau^2 C_2\omega_{m0}^2)\tau}{J_m + \eta\tau^2 J_u} \right| \quad (31)$$

La condizione su J_u , infine, diventa

$$J_u > \frac{1}{|\dot{\Omega}|} \left(\frac{B\omega_{m0}}{\eta\tau} + C_0 + \tau^2 C_2\omega_{m0}^2 \right) - \frac{J_m}{\eta\tau^2} \quad (32)$$

¹In questo caso non è strettamente necessario considerare anche le forze d'inerzia. Lo studio della sola stabilità statica è da considerarsi sufficiente

Esercizio 3

3.a) Coppia necessaria per moto in discesa

Considerando il diagramma di corpo libero della sola massa M , e chiamando N e T le reazioni al terreno e φ il tiro della fune, in condizioni di moto vario si ottengono i seguenti bilanci di forze, in direzione verticale e orizzontale

$$N = Mg \quad (33a)$$

$$\varphi = M\ddot{x} + f_d N = M(R\ddot{\theta} + f_d g) \quad (33b)$$

Avendo considerato il legame cinematico $x = R\theta$, con x spostamento verso sinistra della massa e θ angolo di rotazione del disco intorno al proprio baricentro, positivo in senso antiorario.

Mentre per il disco, chiamate N_D e T_D le reazioni al contatto, si ottiene

$$N_D = M_d g \cos \alpha \quad (34a)$$

$$T_D = M_d g \sin \alpha - M_d R\ddot{\theta} - \varphi = M_d g \sin \alpha - M_d R\ddot{\theta} - M(R\ddot{\theta} + f_d g) \quad (34b)$$

L'equazione di moto del sistema è ottenibile (per esempio) considerando il bilancio di momenti intorno al centro del disco

$$C_m - J_d \ddot{\theta} - f_v N_D R - \left(M_d R \ddot{\theta} + M(R\ddot{\theta} + f_d g) \right) R + M_d g R \sin \alpha = 0 \quad (35)$$

ovvero

$$(J_d + M_d R^2 + MR^2) \ddot{\theta} = C_m - M_d R g (f_v \cos \alpha - \sin \alpha) - MR g f_d \quad (36)$$

A regime in discesa l'accelerazione $\ddot{\theta}$ sarà nulla. La coppia motrice corrispondente è

$$C_m = M_d R g (f_v \cos \alpha - \sin \alpha) + MR g f_d \quad (37)$$

3.b) Accelerazione del centro del disco allo spunto

La coppia C_m necessaria per avere distacco della massa si ottiene dall'equilibrio statico del sistema in condizioni di vincolo di attrito saturato, ovvero in cui $T = f_s N$:

$$\bar{C}_m = -M_d R g \sin \alpha + MR g f_s \quad (38)$$

Si farà qui l'ipotesi che $MR g f_s > M_d R g \sin \alpha$ e che quindi $C_m > 0$.

L'accelerazione allo spunto del disco si ricava immediatamente dalla (36)²:

$$\bar{a}_d = R\ddot{\theta} = R \frac{C_m - M_d R g (f_v \cos \alpha - \sin \alpha) - MR g f_d}{J_d + M_d R^2 + MR^2} \quad (39)$$

L'aderenza del disco è garantita se $|T_D| \leq f_s N_D$, ovvero se

$$|M_d g \sin \alpha - (M + M_d) \bar{a}_d - M f_d g| \leq f_s M_d g \cos \alpha \quad (40)$$

Considerando la condizione di moto richiesta l'accelerazione del disco sarà diretta verso il basso e quindi la reazione tangente T_D sarà anch'essa diretta verso il basso. La verifica si riduce a

$$-M_d g \sin \alpha + (M + M_d) \bar{a}_d + M f_d g \leq f_s M_d g \cos \alpha \quad (41)$$

ovvero

$$\bar{a}_d \leq \frac{M_d g (f_s \cos \alpha - \sin \alpha) - M f_d g}{M + M_d} \quad (42)$$

²Nota: la presenza della coppia di resistenza a rotolamento in condizioni di spunto è opinabile, dal momento che si è di fronte ad una singolarità nel modello adottato per rappresentarla. Anche se nelle formule che seguono verrà sempre inclusa, non considerarla non costituisce un errore.

Che si può tradurre in una condizione su C_m :

$$R \frac{C_m - M_d R g (f_v \cos \alpha - \sin \alpha) - M R g f_d}{J_d + M_d R^2 + M R^2} \leq \frac{M_d g (f_s \cos \alpha - \sin \alpha) - M f_d g}{M + M_d} \quad (43)$$

e quindi

$$C_m \leq \frac{J^*}{M^* R} (M_d g (f_s \cos \alpha - \sin \alpha) - M g f_d) + M_d R g (f_v \cos \alpha - \sin \alpha) - M R g f_d \quad (44)$$

con $J^* = J_d + M_d R^2 + M R^2$ e $M^* = M + M_d$.

Esercizio 4

4.a) Approccio agli stati, regime e stabilità.

Le equazioni della dinamica della parte meccanica e della parte elettrica (già lineari) sono

$$C_m - C_u - J_m \frac{d\omega_m}{dt} = 0 \quad (45a)$$

$$L \frac{di_a}{dt} + R i_a + K \omega_m = e_a \quad (45b)$$

ovvero, tenendo conto che $C_m = K i_a$ e che $C_u = C_0 + C_1 \omega_m$, con $C_0 > 0$ e $C_1 > 0$:

$$\frac{d\omega_m}{dt} = -\frac{C_1}{J_m} \omega_m + \frac{K}{J_m} i_a - \frac{1}{J_m} C_0 \quad (46a)$$

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{K}{L} \omega_m - \frac{R}{L} i_a + \frac{1}{L} e_a \quad (46b)$$

che riscritte, considerando come ingressi sia e_a che C_0 , diventano

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\omega_m}{dt} \\ \frac{di_a}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1/J_m & K/J_m \\ -K/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_m \\ i_a \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/L \end{Bmatrix} e_a + \begin{Bmatrix} -1/J_m \\ 0 \end{Bmatrix} C_0 \quad (47a)$$

A regime, le equazioni diventano

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1/J_m & K/J_m \\ -K/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{m0} \\ i_{a0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/L \end{Bmatrix} e_a + \begin{Bmatrix} -1/J_m \\ 0 \end{Bmatrix} C_0 \quad (48a)$$

la cui soluzione è

$$\begin{Bmatrix} \omega_{m0} \\ i_{a0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1/J_m & K/J_m \\ -K/L & -R/L \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ -1/L \end{Bmatrix} e_a + \begin{Bmatrix} 1/J_m \\ 0 \end{Bmatrix} C_0 \right) \quad (49)$$

ovvero

$$\begin{Bmatrix} \omega_{m0} \\ i_{a0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{C_1 e_a + C_0 K}{C_1 R + K^2} \\ \frac{K e_a - C_0 R}{C_1 R + K^2} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

La stabilità della soluzione è garantita se gli autovalori della matrice di stato hanno tutti parte reale negativa. L'equazione caratteristica è

$$\det [\lambda [I] - [A]] = 0 \quad (51)$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + C_1/J_m & -K/J_m \\ K/L & \lambda + R/L \end{bmatrix} = \left(\lambda + \frac{C_1}{J_m} \right) \left(\lambda + \frac{R}{L} \right) + \frac{K^2}{J_m L} = 0 \quad (52)$$

ovvero

$$\lambda^2 + \left(\frac{C_1}{J_m} + \frac{R}{L} \right) \lambda + \frac{K^2 + C_1 R}{J_m L} = 0 \quad (53)$$

Il sistema è asintoticamente stabile, dal momento che sia il coefficiente che moltiplica λ sia il termine noto della (53) sono positivi, a condizione che C_1 soddisfi entrambe le relazioni $C_1 > -J_m R/L$ e $C_1 > -K^2/R$.

4.b) Residualizzazione statica della parte elettrica

Per effettuare una residualizzazione statica della parte elettrica, si suppone trascurabile la variazione nel tempo della corrente. L'equazione della dinamica della parte elettrica diventa algebrica:

$$L \frac{di_a}{dt} = 0 = Ri_a + K\omega_m \quad (54)$$

e può quindi essere risolta immediatamente rispetto ad i_a :

$$i_a = \frac{1}{R}e_a - \frac{K}{R}\omega_m \quad (55)$$

espressione che sostituita nell'equazione della dinamica della parte meccanica porta a

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} + \left(C_1 + \frac{K^2}{R} \right) \omega_m = \frac{K}{R}e_a - C_0 \quad (56)$$

La cui stabilità si valuta allo stesso modo di quanto visto al punto 2.a), ottenendo

$$\lambda = -\frac{C_1 + K^2/R}{J_m} < 0 \quad (57)$$

il sistema è quindi asintoticamente stabile, purchè $C_1 > -K^2/R$.