

**PRINCIPI DI SISTEMI
ELETTRICI**
SEDE DI MILANO

I Compitino del 03 – 05 – 2017



1) Il circuito di Fig. 1, in regime stazionario, è così assegnato:

$E_1 = 10 \text{ V}$	$R_1 = 10 \Omega$
$E_2 = 20 \text{ V}$	$R_2 = 15 \Omega$
$E_3 = 15 \text{ V}$	$R_3 = 5 \Omega$
$A_1 = 4 \text{ A}$	$R_4 = 20 \Omega$
$A_2 = 8 \text{ A}$	$L = 400 \text{ mH}$

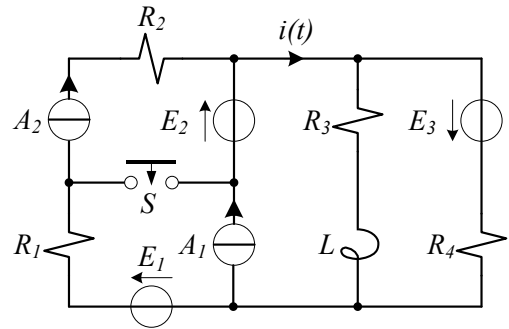


Fig. 1

L'interruttore S è aperto da un tempo infinito e si chiude all'istante $t = 0 \text{ s}$.

Determinare:

- L'andamento nel tempo, nell'intervallo $[0-; +\infty)$ della variabile di rete $i(t)$.
- L'energia accumulata nell'induttore al tempo $t^* = 120 \text{ ms}$.

2) Il circuito di Fig. 2, in regime stazionario, è così assegnato:

$E_1 = 30 \text{ V}$	$R_1 = 4 \Omega$	$R_4 = 10 \Omega$
$E_2 = 60 \text{ V}$	$R_2 = 8 \Omega$	$R_5 = 5 \Omega$
$E_3 = 20 \text{ V}$	$R_3 = 12 \Omega$	
$A = 4 \text{ A}$		
$\delta_1 = 2 \text{ mm}$	$N_1 = 300$	$A_{fe} = 50 \text{ cm}^2$
$\delta_2 = 4 \text{ mm}$	$N_2 = 100$	

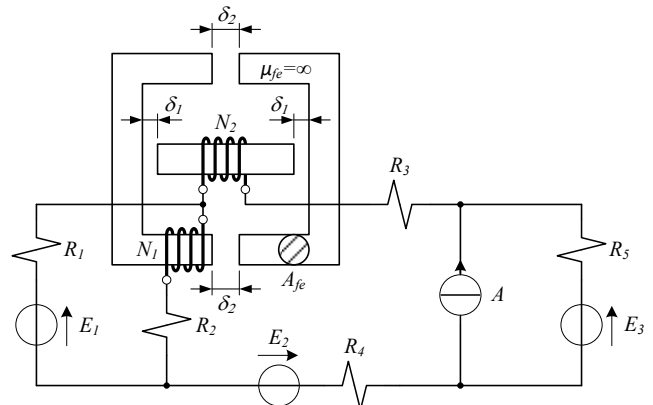


Fig. 2

Determinare:

- I coefficienti di auto e mutua induttanza, ed i morsetti contrassegnati.
- L'energia magnetica accumulata nel mutuo induttore.

3) Algebra dei fasori

- Sinusoide, vettore rotante e fasore: *esplicitare* il loro legame. Dettagliare la trasformazione e l'antitrasformazione da una grandezza sinusoidale al fasore. Proprietà dei fasori.
- *Analisi circuitale con il metodo simbolico.*
 - Dedurre, con riferimento al circuito serie R-L o R-L-C, il teorema di Kennelly-Steinmetz (enunciare il teorema e riportare la tabella di "corrispondenza" tempo-frequenza che lo sintetizza).
 - Leggi di Kirchhoff e equazioni dei componenti ideali in regime sinusoidale.

Modalità d'esame

- Il tempo previsto per lo svolgimento del compito scritto è di 1.5 ore a partire dal momento della consegna del tema
- **Agli effetti della valutazione dello scritto non verranno considerati gli eventuali esercizi svolti, anche solo prevalentemente, in forma letterale**
- Nel corso dello svolgimento occorre anteporre ad ogni relazione numerica la formalizzazione letterale corrispondente.

Esempio: $V=R I =8 \times 4 =32 \text{ V}$

(tale accorgimento, oltre ad essere indispensabile sul piano della correttezza formale, favorisce la correzione del tema)

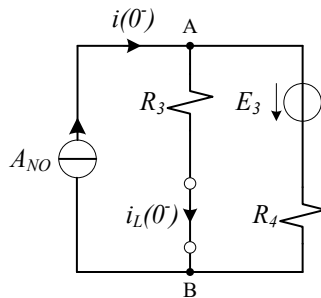
- Si prega di scrivere il proprio *Cognome e Nome* in stampatello sia sul foglio di intestazione che, per evidenti ragioni di sicurezza, su tutti gli altri eventuali. Questi, per la stessa ragione, converrà che siano numerati, pagina per pagina, secondo l'ordine seguito dal Candidato nello svolgimento degli esercizi.
- Al termine del tempo previsto il Candidato, se lo ritiene, può consegnare il proprio elaborato.

sl

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1) Rete in $t = 0^-$

All'istante $t = 0^-$, l'interruttore S è aperto, l'induttore L è a regime e la rete è di tipo binodale. Inoltre, la parte di rete formata da A_1 , E_1 , R_1 , A_2 , E_2 ed R_2 , essendo formata da due lati a corrente impressa in parallelo, è rappresentabile agli effetti esterni da un unico generatore indipendente di corrente.



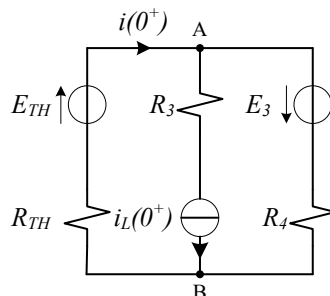
$$i(0^-) = A_{NO} = A_1 + A_2 = 12 \text{ A}$$

$$v_{AB}(0^-) = \frac{A_{NO} - \frac{E_3}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = 45 \text{ V}$$

$$i_L(0^-) = +\frac{v_{AB}(0^-)}{R_3} = 9 \text{ A}$$

2) Rete in $t = 0^+$

Al fine di semplificare la rete, si determina l'equivalente di Thévenin della parte di rete formata da A_1 , E_1 , R_1 , A_2 , E_2 ed R_2 nel caso di interruttore chiuso (quindi valida anche per l'analisi a $+\infty$).



$$E_{TH} = E_1 + E_2 + R_1 \cdot A_1 = 70 \text{ V}$$

$$R_{TH} = R_1 = 10 \Omega$$

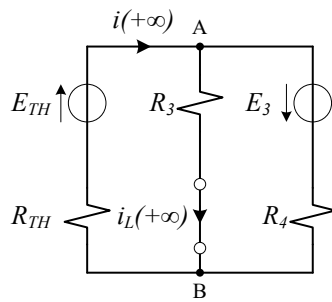
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 9 \text{ A}$$

$$v_{AB}(0^+) = \frac{\frac{E_{TH}}{R_{TH}} - i_L(0^+) - \frac{E_3}{R_4}}{\frac{1}{R_{TH}} + \frac{1}{R_4}} = -18.3333 \text{ V}$$

$$i(0^+) = \frac{E_{TH} - v_{AB}(0^+)}{R_1} = 8.8333 \text{ A}$$

3) Rete in $t = +\infty$

All'istante $t = +\infty$, la topologia della rete è di tipo binodale.

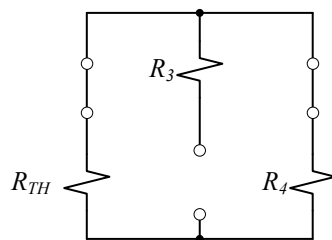


$$v_{AB}(+\infty) = \frac{\frac{E_{TH}}{R_{TH}} - \frac{E_3}{R_4}}{\frac{1}{R_{TH}} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = 17.8571 \text{ V}$$

$$i(+\infty) = \frac{E_{TH} - v_{AB}(+\infty)}{R_{TH}} = 5.2143 \text{ A}$$

$$i_L(+\infty) = \frac{v_{AB}(+\infty)}{R_3} = 3.5714 \text{ A}$$

4) Costante di tempo



$$R_{eq} = R_3 + \frac{R_4 \cdot R_{TH}}{R_4 + R_{TH}} = 11.6667 \text{ } \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 34.2857 \text{ ms}$$

5) Variabile di rete ed energia accumulata nell'induttore

$$i(t) = (i(0^+) - i(+\infty)) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + i(+\infty) =$$

$$= 3.6190 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 5.2143 \text{ A}$$

$$i_L(t^*) = (i_L(0^-) - i_L(+\infty)) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(+\infty) = 3.7354 \text{ A}$$

$$w_L(t^*) = \frac{1}{2} L \cdot i_L^2(t^*) = 2.7906 \text{ J}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

%% Calcolo delle auto e mutue induttanze

$$R_{\delta 1} = 1/\mu_0 * \delta_1 / A_{fe} = 3.1831 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{\delta 2} = 1/\mu_0 * \delta_2 / A_{fe} = 6.3662 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{eq11} = R_{\delta 2} + ((2 \cdot R_{\delta 1}) \cdot R_{\delta 2}) / ((2 \cdot R_{\delta 1}) + R_{\delta 2}) = 9.5493 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{eq22} = 2 * R_{\delta 1} + R_{\delta 2} / 2 = 9.5493 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$L_{11} = N_1^2 / R_{eq11} = 94.2478 \text{ mH}$$

$$L_{22} = N_2^2 / R_{eq22} = 10.4720 \text{ mH}$$

$$L_M = N_1 * N_2 / R_{eq11} * R_{\delta 2} / ((2 * R_{\delta 1}) + R_{\delta 2}) = 15.7080 \text{ mH}$$

% Alternativamente, riconoscendo che il circuito magnetico è assimilabile

% ad un nucleo ad M con 3 traferri uguali di spessore δ_2

$$R_{\delta} = 1/\mu_0 * \delta_2 / A_{fe} = 6.3662 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$L_{11} = N_1^2 * (2 / 3) / R_{\delta} = 94.2478 \text{ mH}$$

$$L_{22} = N_2^2 * (2 / 3) / R_{\delta} = 10.4720 \text{ mH}$$

$$L_M = N_1 * N_2 * (1 / 3) / R_{\delta} = 15.7080 \text{ mH}$$

%% Risoluzione della rete

% Equivalente di Thévenin della parte a di destra

$$R_{TH} = R_3 + R_4 + R_5 = 27 \Omega$$

$$E_{TH} = E_2 + E_3 + R_5 * A = 100 \text{ V}$$

% Calcolo delle correnti negli avvolgimenti

$$V_{AB} = (E_1/R_1 + E_{TH}/R_{TH}) / (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_{TH}) = 27.1910 \text{ V}$$

$$I_1 = V_{AB} / R_2 = 3.3989 \text{ A}$$

$$I_2 = (V_{AB} - E_{TH}) / R_{TH} = -2.6966 \text{ A}$$

% Calcolo dell'energia immagazzinata

$$W_{\mu} = 1/2 * L_{11} * I_1^2 + 1/2 * L_{22} * I_2^2 + L_M * I_1 * I_2 = 0.4385 \text{ J}$$