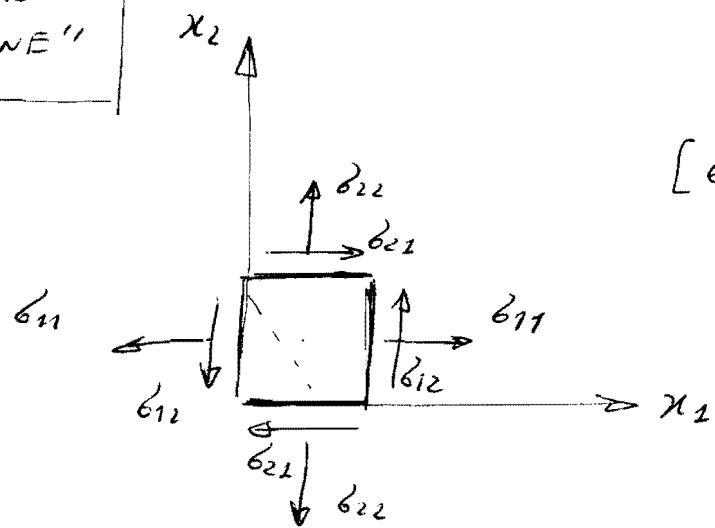


# ESERCITAZIONE MDS - 22/11/2011

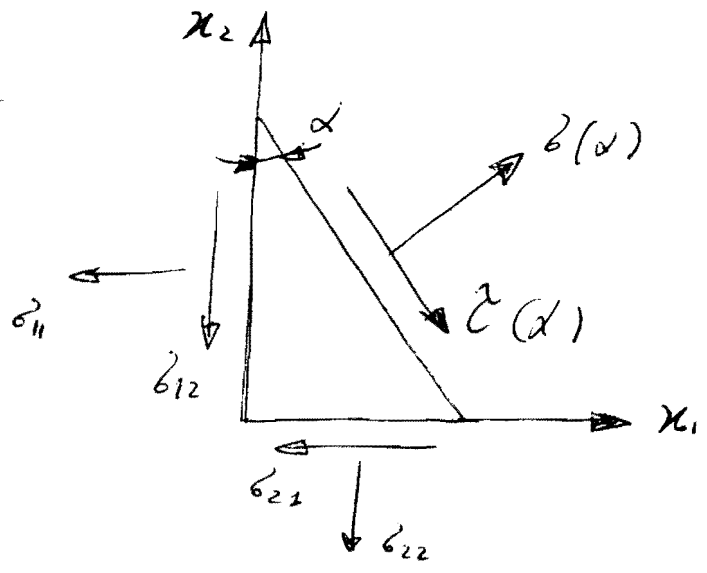
"STATO DI SFORZO E DEFORMAZIONE"



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Matrice Simmetrica  
 $(\sigma_{12} = \sigma_{21})$

no. 30  
 Convenzione di Cauchy per gli sforzi di Tracce.



definito  $\alpha$ ,  
 $\sigma(\alpha)$ ?  
 $\tau(\alpha)$ ?

Scrittura delle equazioni di equilibrio:

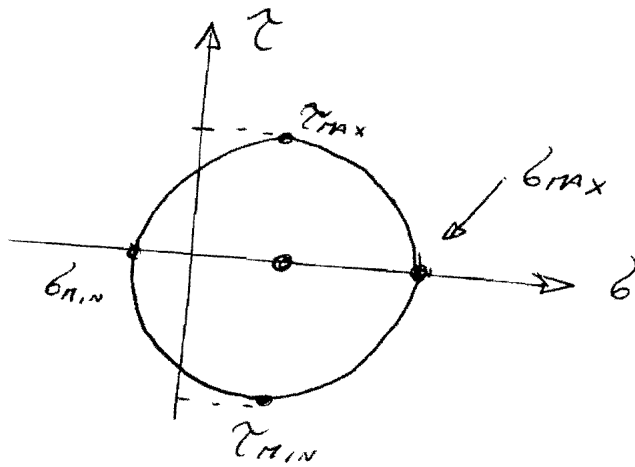


$$\sigma(\alpha) = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cdot \cos(2\alpha) + \sigma_{12} \cdot \sin(2\alpha)$$

$$\tau(\alpha) = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cdot \sin(2\alpha) - \sigma_{12} \cdot \cos(2\alpha)$$

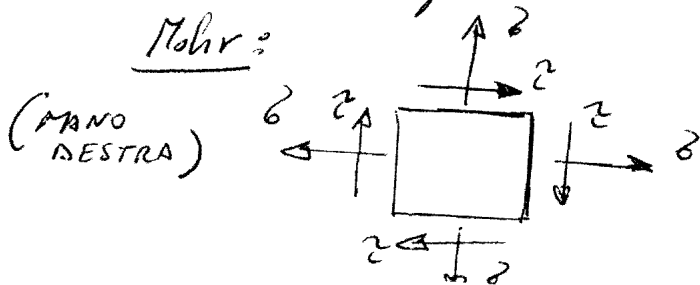


Equazioni che definiscono, per  $0 < \alpha < \pi$ , una circonferenza nel piano  $\sigma$ - $\tau$

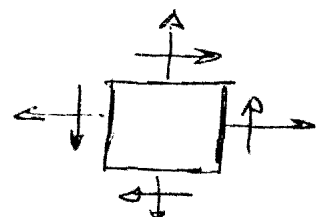


Caratteristiche del cerchio di Mohr:

- 1) Fornisce una panoramica dello stato di sforzo  $\sigma$ - $\tau$  al variare dell'angolo  $\alpha$ .
- 2) Permette di stabilire facilmente i valori di  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$ ,  $\tau_{max}$ ,  $\tau_{min}$ .
- 3) È sempre centrato su un punto appartenente all'asse  $\sigma$ .
- 4) È parametrizzato in funzione di  $(2\alpha)$ , quindi due punti diametralmente opposti sul cerchio di Mohr rappresentano gli stati di sforzo su due facce ortogonali tra di loro nella realtà.
- 5) È tracciato in accordo alle convenzioni di Mohr per gli sforzi di taglio:

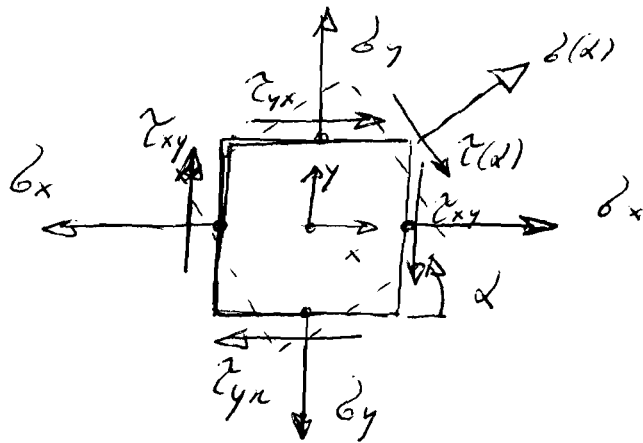


Cauchy

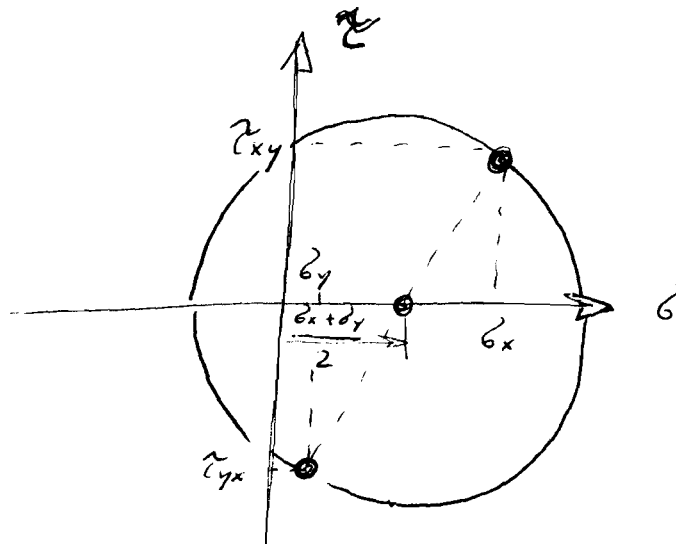


# STATO DI SFORZO NEL PIANO:

Metodo per  
il Tracciamento del  
Cerchio di Mohr:

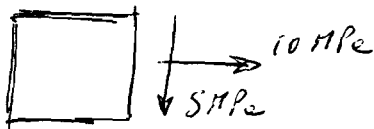


NB: Per  
garantire  
l'equilibrio,  
in accordo  
a questa  
conversione  
almeno un  
 $\tau$  deve essere  
negativo!

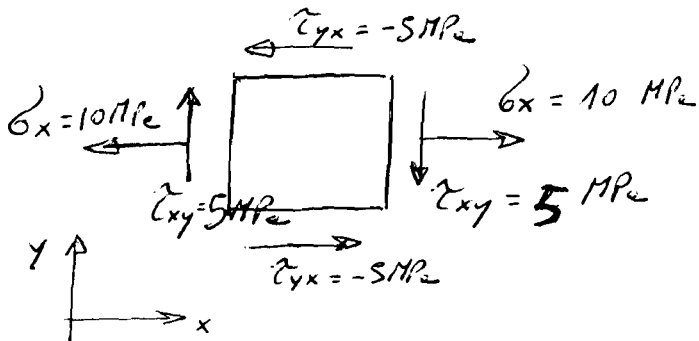
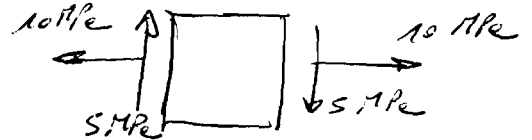


## Esempio Numerico:

DATO  
INIZIALE:



Rispetto  
EQUILIBRIO  
ALLA  
TRASLAZIONE

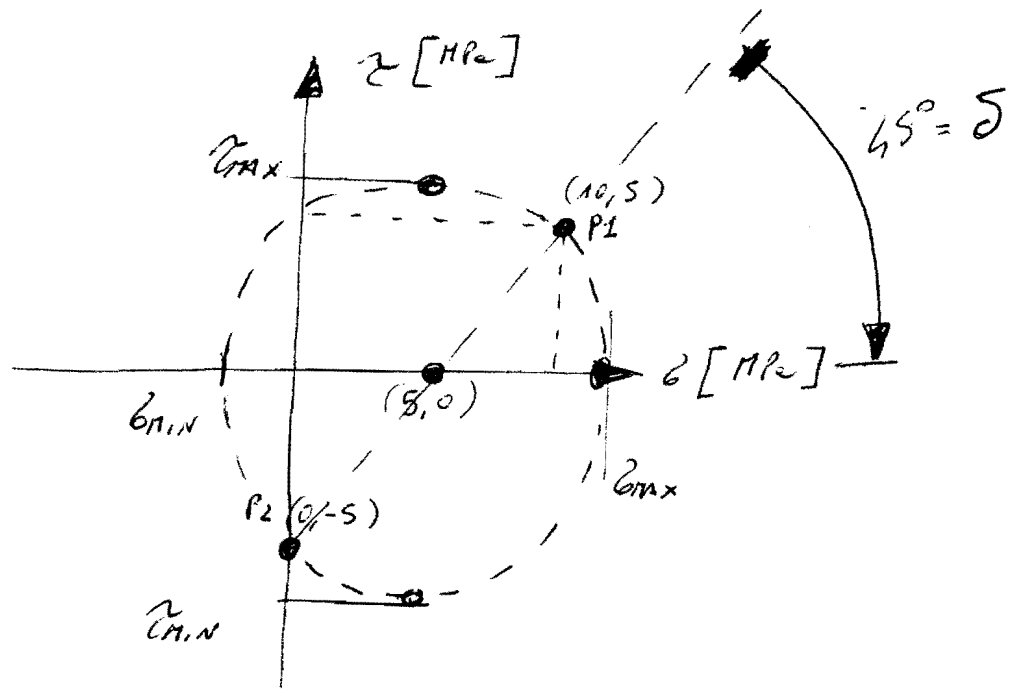


Rispetto  
EQUILIBRIO  
ALLA  
ROTAZIONE

DATI

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 10 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= 5 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} P_1$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= 0 \\ \tau_{yx} &= -5 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} P_2$$



NOTI due punti:  
diametri e calcolo  
il valore del  
RAGGIO:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(y_{P2} - y_{P1})^2 + (x_{P2} - x_{P1})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{10^2 + 10^2} = \frac{1}{2} \sqrt{200} = 7,07$$

FORMULA SFORZI  
PRINCIPALI NEL  
PIANO:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{MAX} = 5 + 7,07 = 12,07 \text{ MPa} = \sigma_1$$

$$\tau_{MAX} = 7,07 \text{ MPa}$$

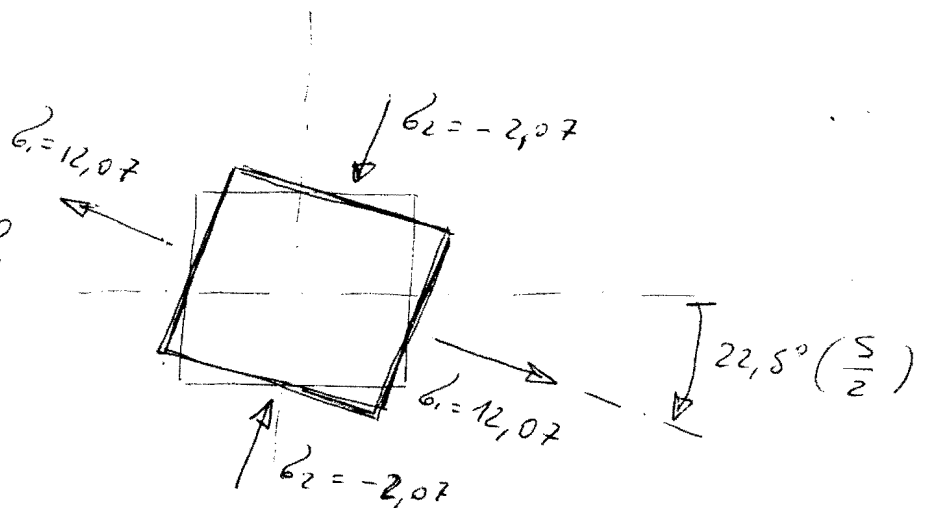
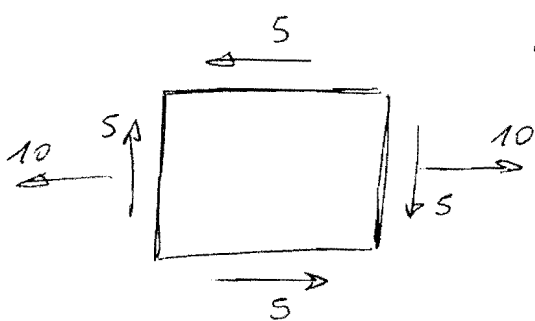
$$\sigma_{MIN} = -7,07 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{MIN} = 5 - 7,07 = -2,07 \text{ MPa} = \sigma_2$$

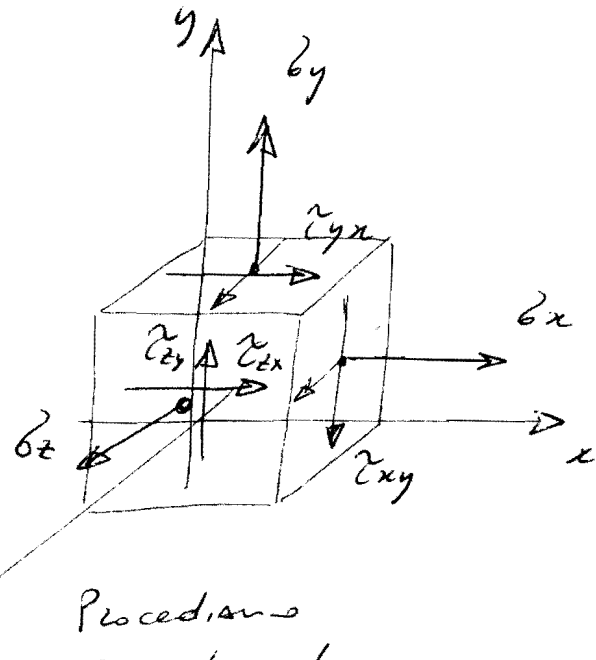
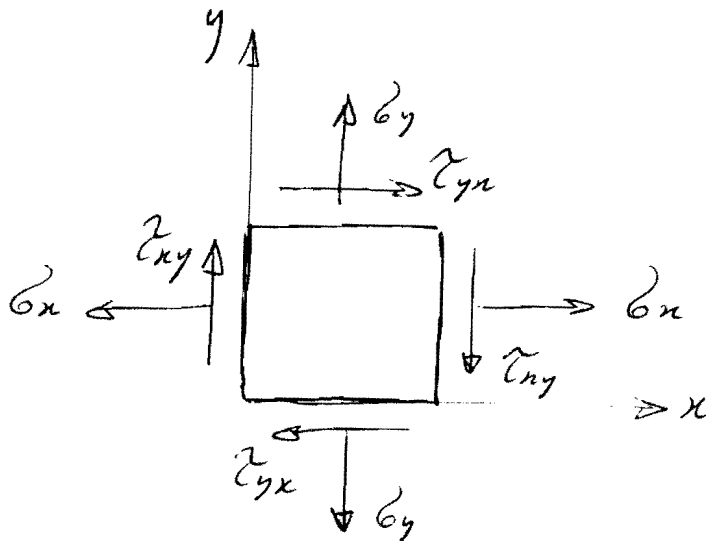
SFORZI PRINCIPALI :  $\sigma_1 = 12,07 \text{ MPa}$  ;  $\sigma_2 = -2,07 \text{ MPa}$

REZIONI PRINCIPALI :

OSS: dal "punto P1" mi muovo di un angolo  $\frac{\sigma}{2}$  nella stessa  
direzione di  $\sigma$  per raggiungere il piano  $\sigma_1$

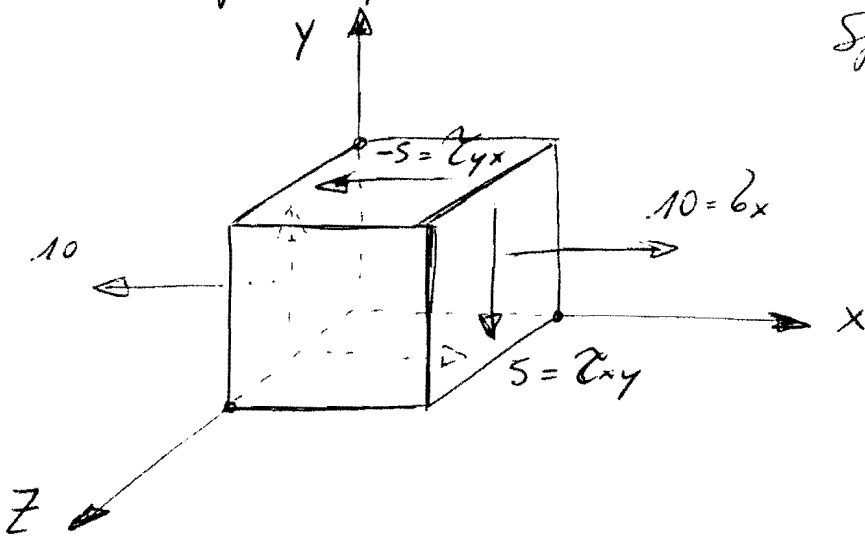


STATO DI SFORZO NELLO SPAZIO :



Procediamo  
considerando  
lo stesso caso di  
prima aggiungendo  
il fatto che  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$

OSS: LA FACCIA di Normale  $z$ , essendo priva di sforzi di Taglio, identifica una direzione principale  $\rightarrow \sigma_z = 0$  è uno dei 3 sforzi principali.

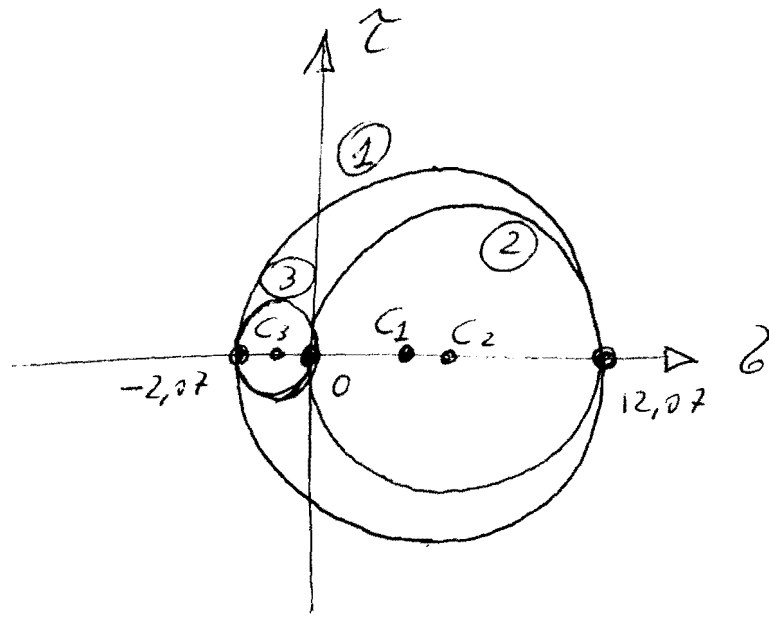


$$\sigma_1 = \sigma_{MAX} = 12,07 \text{ MPa}$$

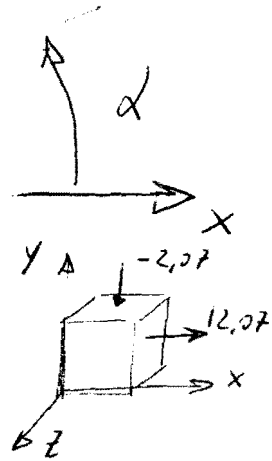
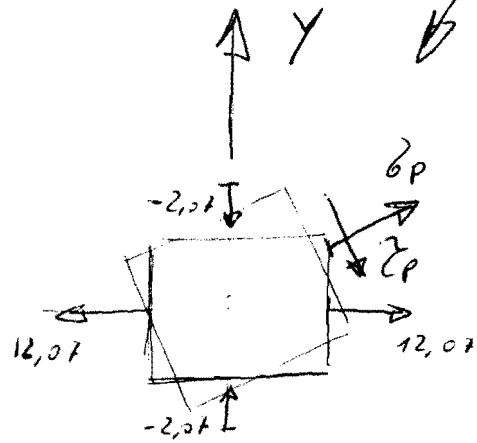
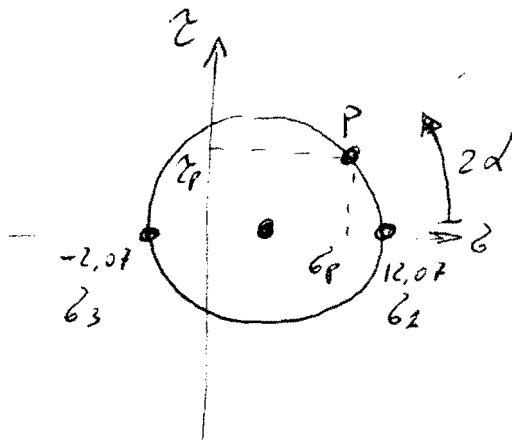
$$\sigma_2 = \sigma_z = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma_{MIN} = -2,07 \text{ MPa}$$

I 3 sforzi principali (e relative direzioni principali) identificano i 3 cerchi di Mohr:

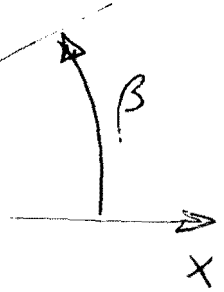
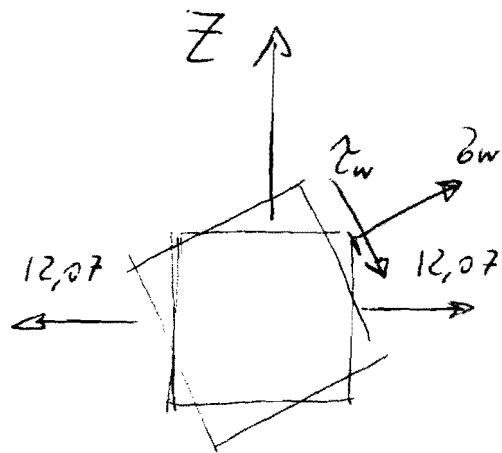
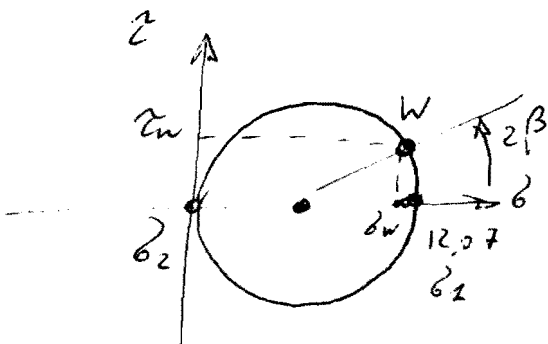


Significato dei 3 cerchi di Mohr:  
cerchio ①:

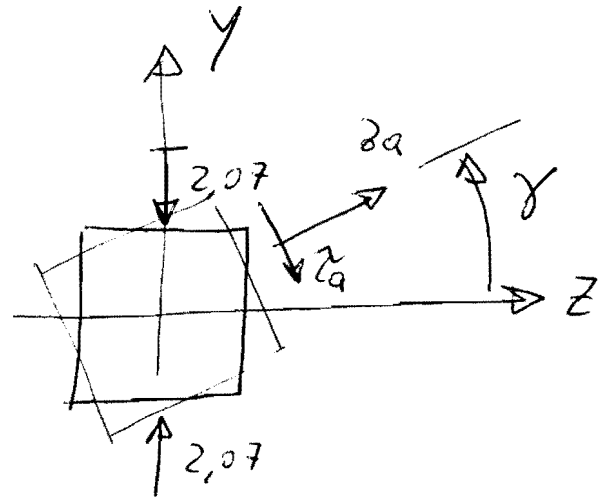
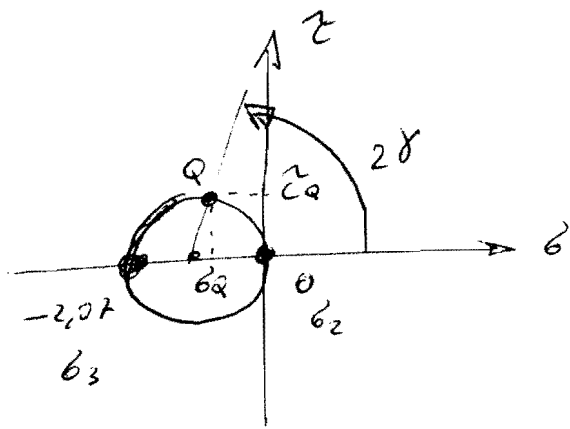


Attenzione!  
Ho adottato il sistema di riferimento delle direzioni principali!

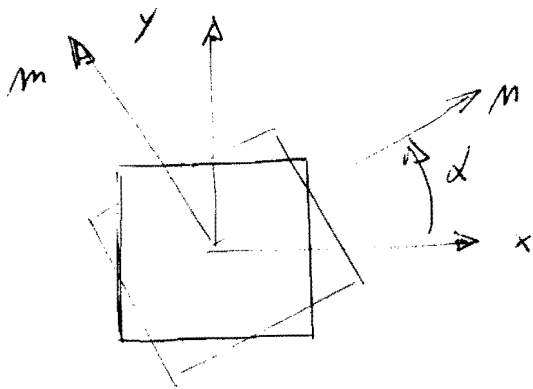
cerchio ②



Cerchio (3) :



CERCHI DI MOHR PER LE DEFORMAZIONI (Nel piano) :



$$[e] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{2} \quad (i \neq j)$$

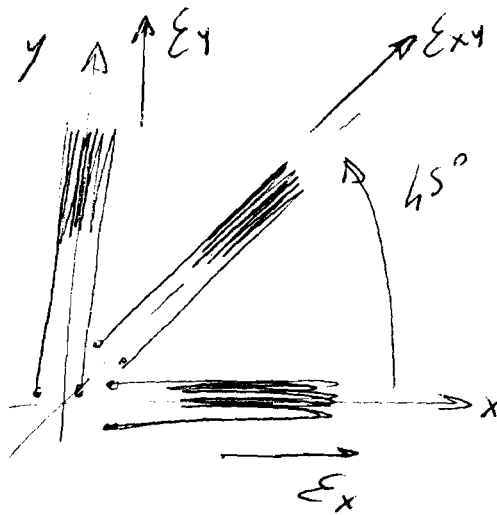
Formule utili (Nel piano)

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cdot \cos(2\alpha) + \frac{\gamma_{yx}}{2} \sin(2\alpha)$$

$$\frac{\gamma_{nm}}{2} = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cdot \sin(2\alpha) - \frac{\gamma_{yx}}{2} \cdot \cos(2\alpha)$$

$$\epsilon_I, \epsilon_{II} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + 4\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

# Utilizzo delle Rosette Estensimetriche:



No. B. Esistono  
Anche le  
Rosette  
estensimetriche  
a 60°



Misurando le deformazioni Assiali  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_{xy}$  ( $E_{45^\circ}$ )  
È possibile identificare lo stato di deformazione  
Superficiale nel punto di Applicazione della  
rosetta:

## ESEMPIO:

Deformazioni Misurate:

$$E_x = E_{0^\circ} = -800 \mu\epsilon$$

$$E_y = E_{90^\circ} = +1000 \mu\epsilon$$

$$E_{45^\circ} = 600 \mu\epsilon$$

Note le deformazioni Assiali nelle 3 direzioni, posso  
stimare la deformazione Angolare  $\gamma_{xy}$  mediante  
la Formula \*:

$$E_{45^\circ} = \frac{E_{0^\circ} + E_{90^\circ}}{2} + \frac{E_{0^\circ} - E_{90^\circ}}{2} \cdot \cos(2 \cdot 45^\circ) + \frac{\gamma_{90^\circ-0^\circ}}{2} \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ)$$



$$\gamma_{90^\circ-0^\circ} = 2 \cdot E_{45^\circ} - E_{0^\circ} - E_{90^\circ}$$



$$\gamma_{90^\circ-0^\circ} = 1200 - (-800) - 1000 = 1000 \mu\epsilon \quad \boxed{8}$$



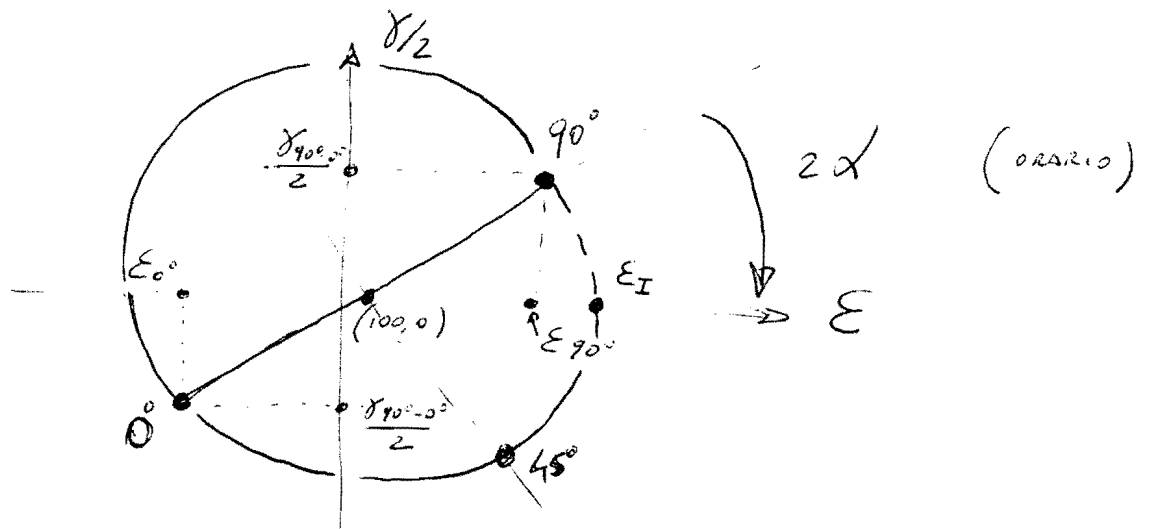
# Definizioni Principali

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{I,II} &= \frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{90^\circ})^2 + 4 \cdot \left(\frac{\gamma_{90^\circ-0^\circ}}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{-800 + 1000}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-1800)^2 + 1000^2} \\
 &= 100 \pm \frac{1}{2} \sqrt{3'240'000 + 1'000'000} \\
 &= 100 \pm 1029
 \end{aligned}$$

$$\epsilon_I = 1129 \text{ } \mu\epsilon$$

$$\epsilon_{II} = -929 \text{ } \mu\epsilon$$

# Direzioni principali

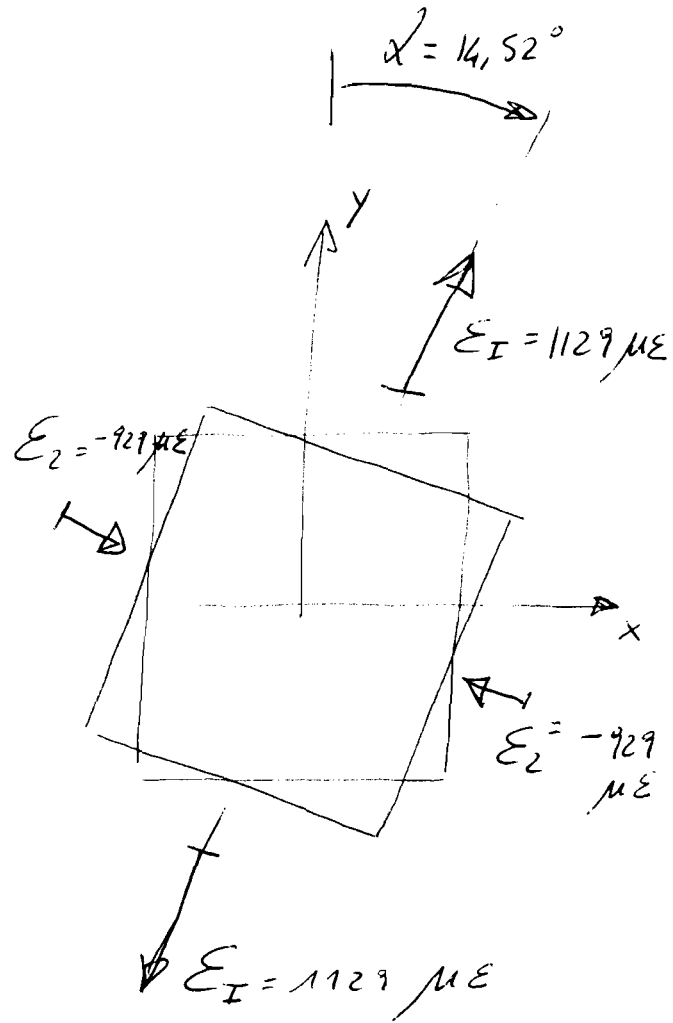
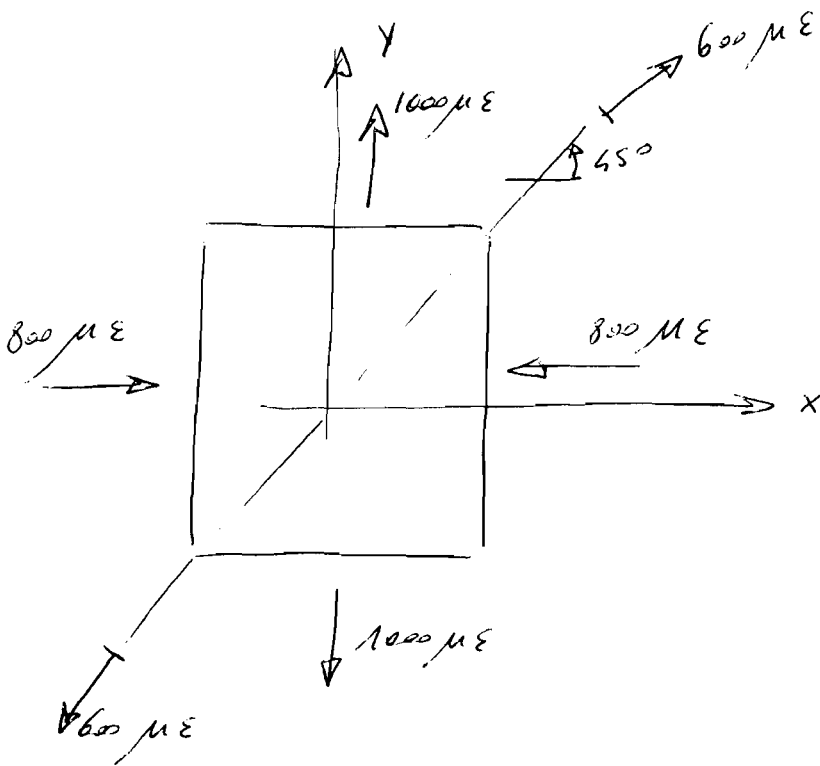


$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \left( \frac{\gamma_{90^\circ-0^\circ}}{2} \right)}{(\epsilon_{90^\circ} - \epsilon_{0^\circ})} = \frac{1000}{1800} = 0,55$$

$$2\alpha = \text{ATAN}(0,55) = 29,05 \text{ deg}$$

$$\alpha = 14,52 \text{ deg}$$

# DIREZIONI PRINCIPALI



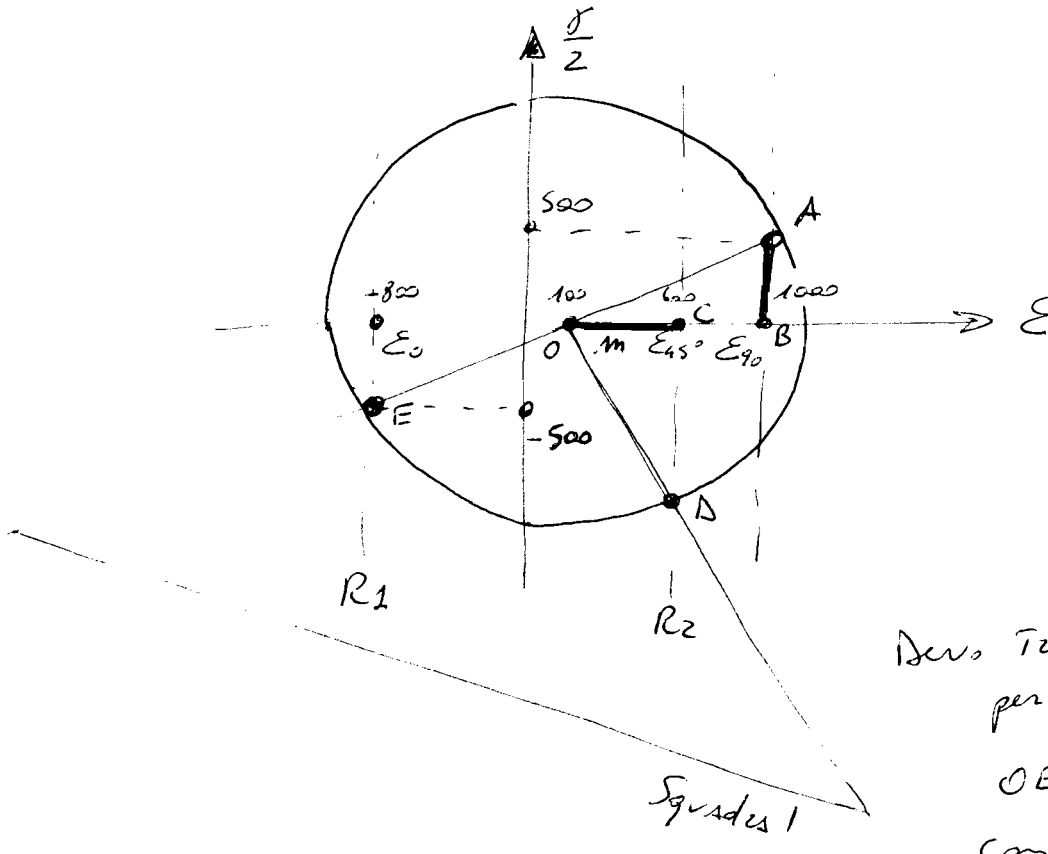
Attenzione: LA costruzione del cerchio di Mohr delle deformazioni poteva essere fatta anche in maniera puramente grafica:

prof. us: [fig 3.16 c del C.620]

$$E_0 = -800$$

$$E_{90} = 1000$$

$$E_{45} = 600$$



Devo trovare l'angolo per cui

$$OE = OA$$

con  $E \in R_1$

$D \in R_2$

"Similitudine"  
 Triangoli AOB - COD



$$AB = OC$$

$$OC = 600 - 100 = 500$$

$$AB = OC = 500$$

Lascia a loro vedere qual'è il

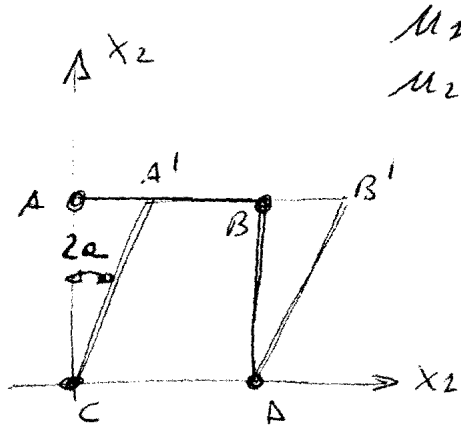
Si prof. us di "Pozzo" del cerchio di Mohr.

e significato delle direzioni principali di deformazione

~~Altri~~

~~Collegato a~~

# Lezione Spostamenti - Deformazioni: Esempio



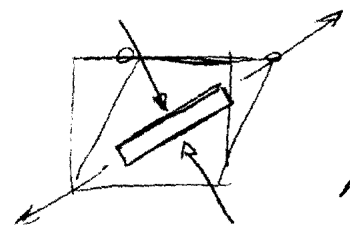
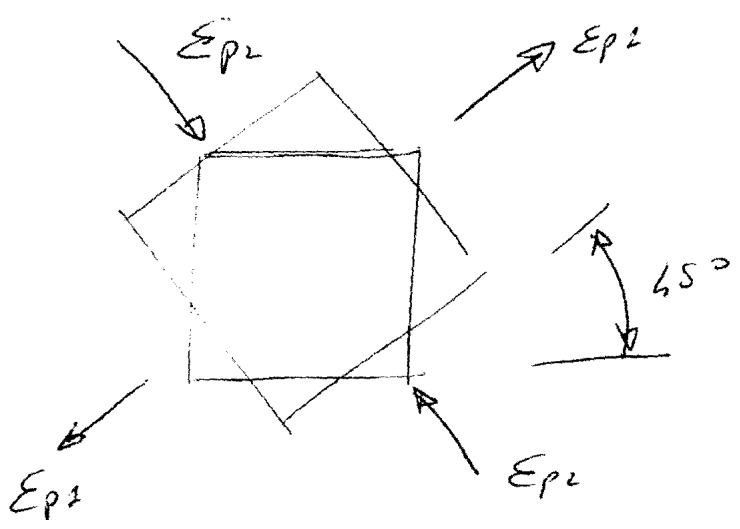
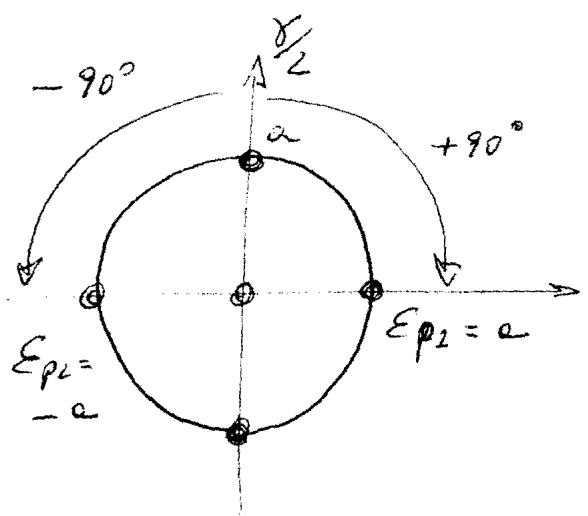
$$u_1 = 2 \cdot a \cdot x_2$$

$$u_2 = 0$$

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = a$$



Le direzioni principali di deformazione non subiscono scorrimenti angolari