Esercitazione 29/11/2011 | MDS - Bovisa

Geometria delle Aree (e delle masse omogenee)

1) Momento Statico (Momento del primo ordine)

2) Baricentro

3) Momento di Inerzia (Mom. rispetto ad un Asse

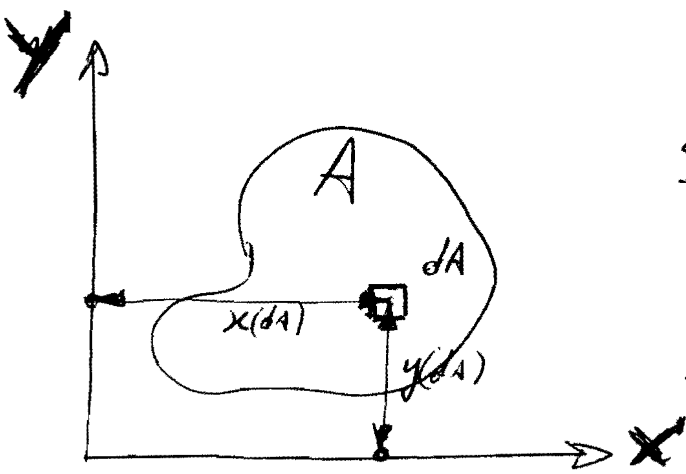
4) Momento centrifugo

5) Assi Principali di Inerzia / Assi centrali di Inerzia / Assi centrali

6) Momenti principali di Inerzia

---

1) Momento Statico.



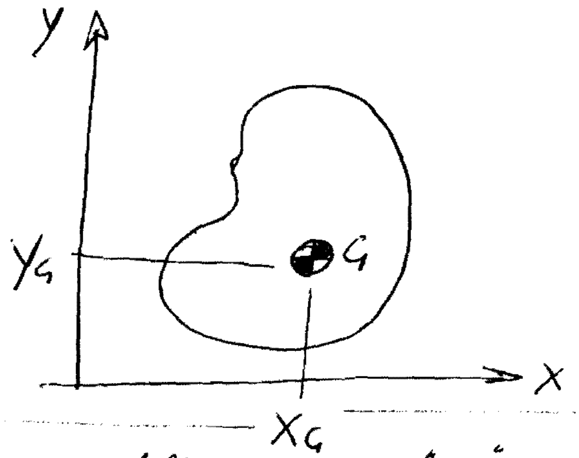
$$A = \int dA$$

$$S_x = \int_A dS_x = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \int_A dS_y = \int_A x \cdot dA$$

A = Area
S_x = Momento Statico rispetto all'Asse x
S_y = Momento Statico rispetto all'Asse y

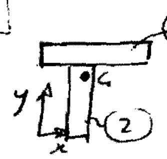
2) Baricentro



$$X_G = \frac{S_y}{A}$$

$$Y_G = \frac{S_x}{A}$$

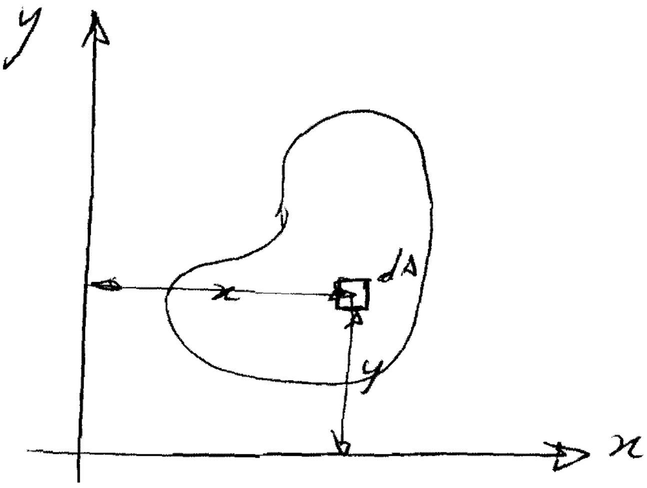
Nel caso della sezione "T" →



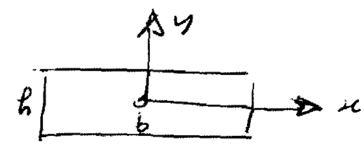
$$X_G = \frac{A_1 \cdot x_{G1} + A_2 \cdot x_{G2}}{A_{TOT}}$$

$$Y_G = \frac{A_1 \cdot y_{G1} + A_2 \, y_{G2}}{A_{TOT}}$$

3) Momento di Inerzia rispetto ad un asse



Caso di Sezione rettangolare: Momenti baricentrici



$$J_x = \frac{b h^3}{12}$$

$$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

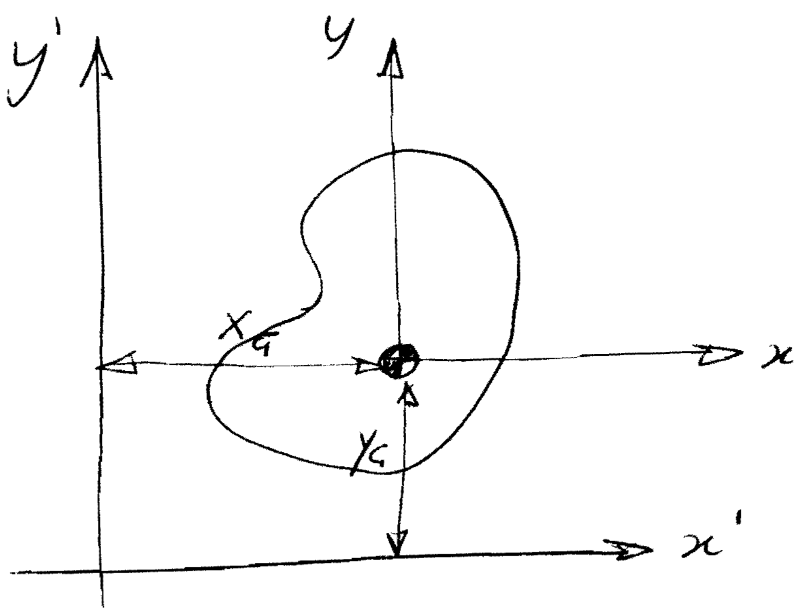
$$J_x = \int_A y^2 \cdot dA > 0$$

$$J_y = \int_A x^2 \cdot dA > 0$$

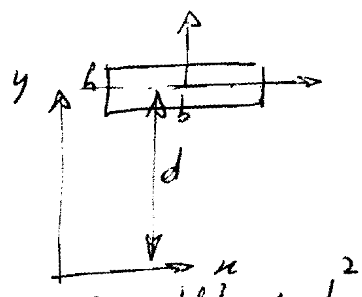
Proprietà dei Momenti di Inerzia:

Teorema del Trasporto di Huygens:

Se x-y è un sistema baricentrico, allora:



Caso di sezione NON centrata

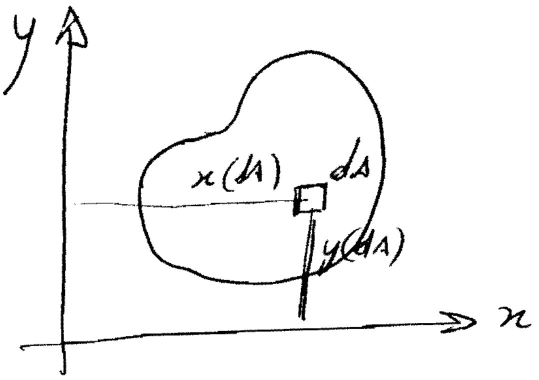


$$J_x = \frac{bh^3}{12} + A \cdot d^2$$

$$J_x = \int_A y^2 \cdot dA \longrightarrow J_{x'} = J_x + A \cdot Y_G^2$$

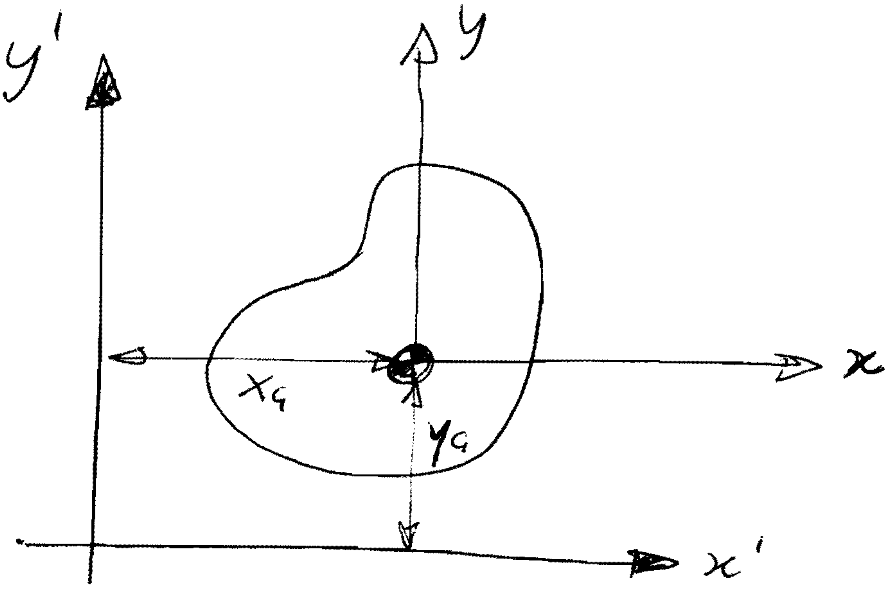
$$J_y = \int_A x^2 \cdot dA \longrightarrow J_{y'} = J_y + A \cdot X_G^2$$

4) Momento centrifugo



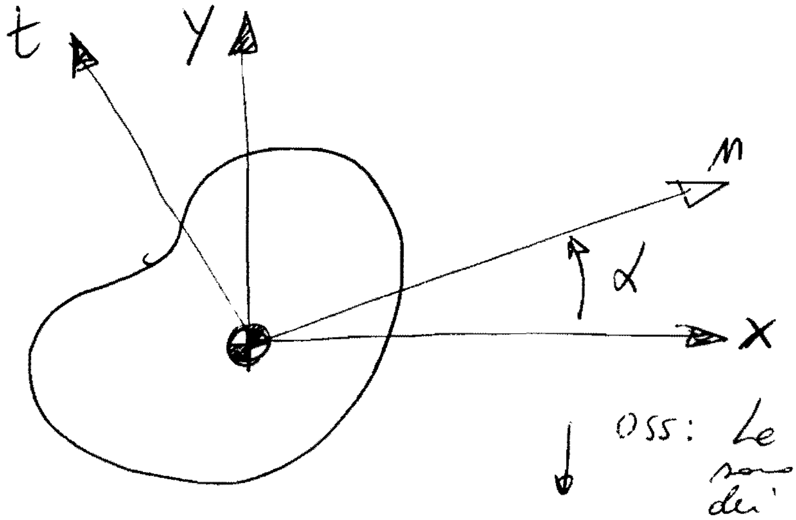
$$J_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

NB: può essere negativo



$$\boxed{J_{x'y'} = J_{xy} + A \cdot x_G' \cdot y_G'}$$

5/6) Assi principali di inerzia / Momenti Principali



NOTI
J_x, J_y, J_{xy}

↓ OSS: Le correlazioni sono simili a quelle dei "cerchi di Mohr".

$$J_n = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos(2\alpha) - J_{xy} \sin(2\alpha)$$

$$J_{nt} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin(2\alpha) + J_{xy} \cdot \cos(2\alpha)$$
(centrifugo)

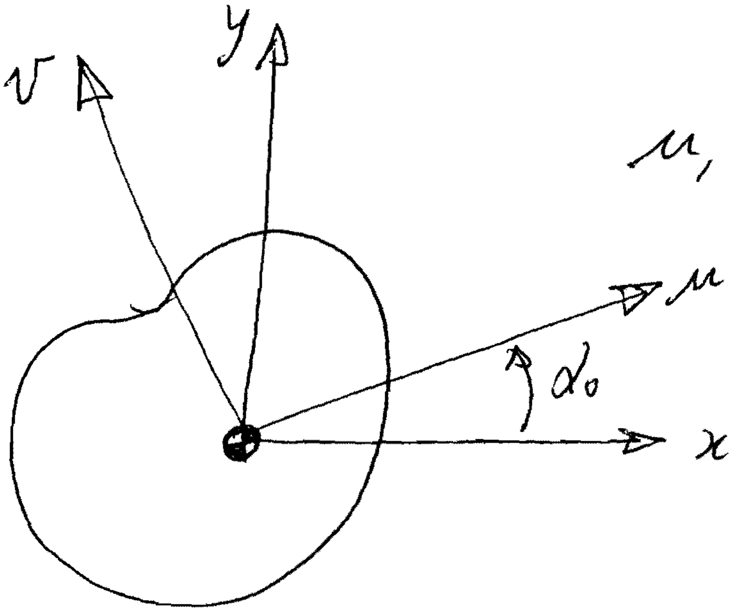
6) Momenti principali di inerzia.

Di tutte le possibili inclinazioni α se ne esiste una che massimizza il momento di inerzia J_n:

$$\alpha\left(J_n = J_{MAX}\right) = \alpha_0$$

$$\Downarrow$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2 J_{xy}}{J_x - J_y}$$



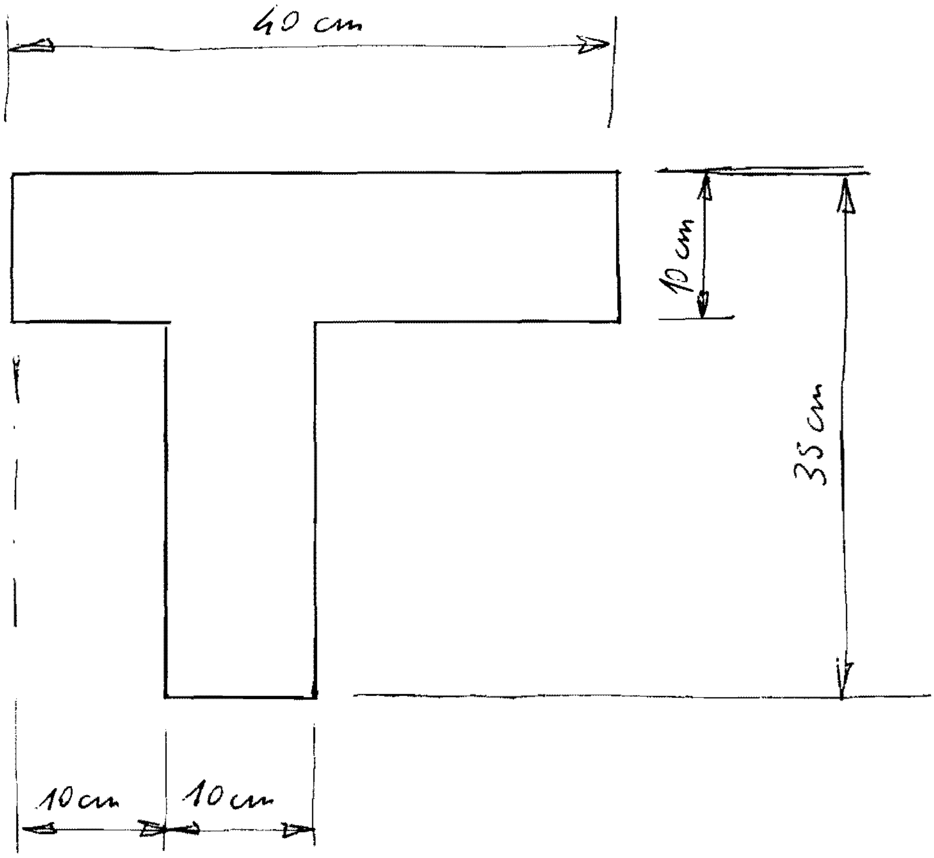
u, v = direzioni principali di inerzia

$$\left.\begin{aligned} J_u &= J_{MAX} \\ J_v &= J_{MIN} \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{J_{MAX,MIN} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}}$$

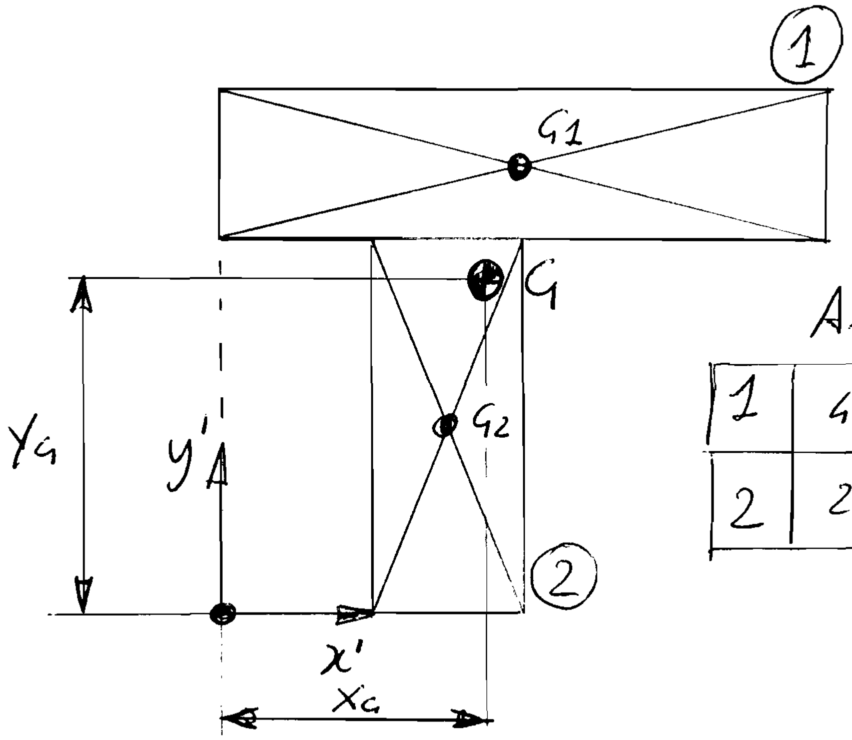
N.B. il momento J_{uv} deve essere nullo!

<u>Esempio Numerico</u>: Sezione T "Sbilanciata"

N.B.: Il fatto che la Sezione sia "Scomponibile" in forme semplici (cerchi e/o rettangoli) rende il Problema affrontabile per "pezzi".



1) BARICENTRO



	$A_i [cm^2]$	$X_{Gi} [cm]$	$Y_{Gi} [cm]$
1	400	20	30
2	250	15	12,5

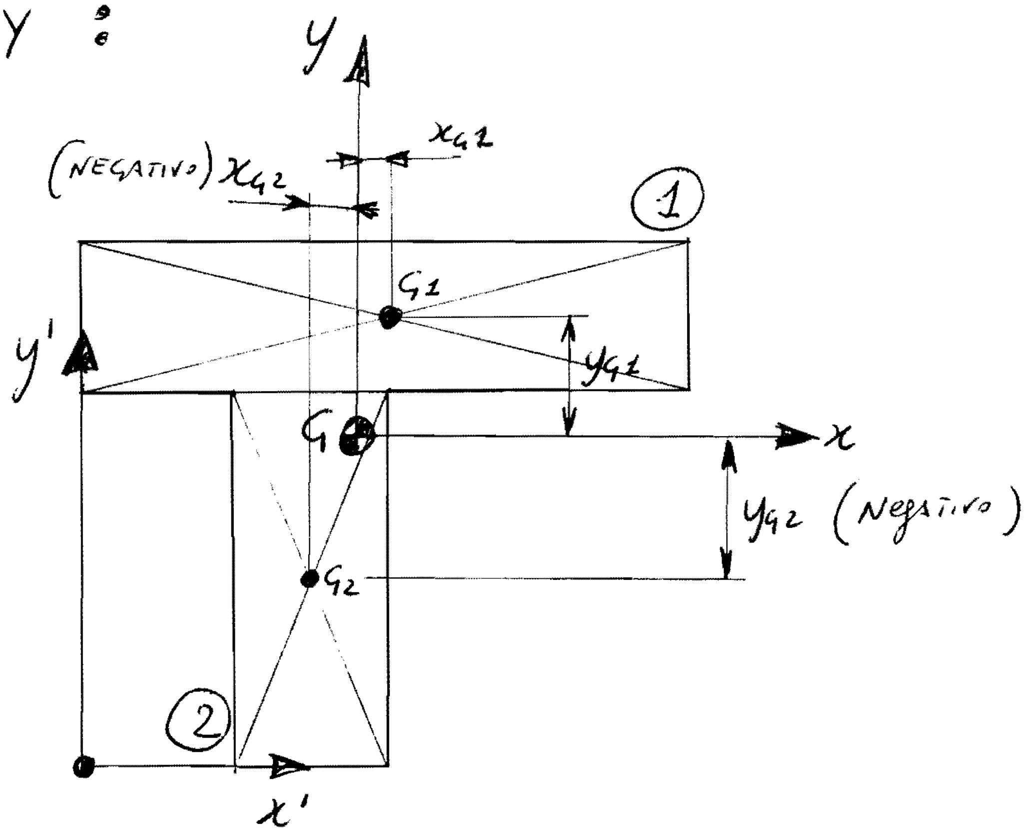
$$X_G = \frac{A_1 \cdot x_{G1} + A_2 \cdot x_{G2}}{(A_1 + A_2)} = \frac{400 \cdot 20 + 250 \cdot 15}{650}$$

$$X_G = 18,07 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{A_1 \cdot y_{G1} + A_2 \cdot y_{G2}}{(A_1 + A_2)} = \frac{400 \cdot 30 + 250 \cdot 12,5}{650}$$

$$Y_G = 23,26 \text{ cm}$$

2) Momenti di Inerzia e Momento centrifugo rispetto agli assi baricentrali x-y:



$$J_x = J_{x1} + J_{x2} + A_1 \cdot y_{G1}^2 + A_2 \cdot y_{G2}^2$$

$$= \frac{40 \cdot 10^3}{12} + \frac{10 \cdot 25^3}{12} + 400 \cdot (30 - 23{,}26)^2 + 250 \cdot (23{,}26 - 12{,}5)^2$$

$$= 63'468{,}44 \ cm^4$$

$$J_y = J_{y1} + J_{y2} + A_1 \cdot x_{G1}^2 + A_2 \cdot x_{G2}^2$$

$$= \frac{10 \cdot 40^3}{12} + \frac{25 \cdot 10^3}{12} + 400 (20 - 18{,}07)^2 + 250 \cdot (18{,}07 - 15)^2$$

$$= 59'262{,}18 \ cm^4$$

$$J_{xy} = A_1 \cdot x_{G1} \cdot y_{G1} + A_2 \cdot x_{G2} \cdot y_{G2}$$

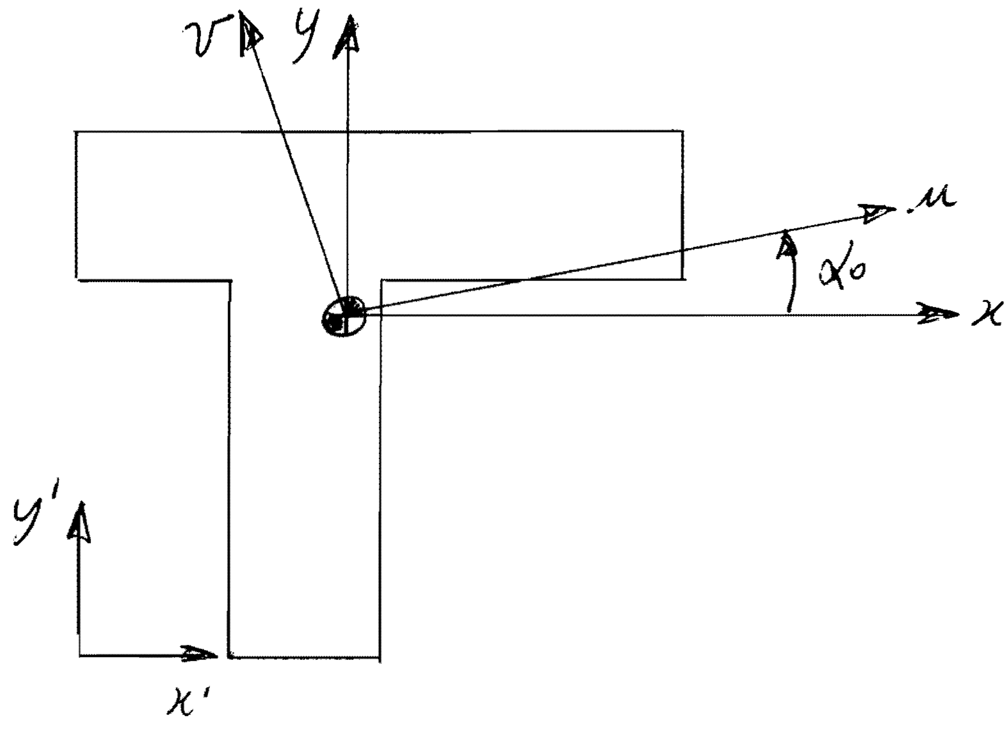
$$= 400 \cdot (20 - 18,07)(30 - 23,26) +$$

$$+ 250 \cdot (15 - 18,07) \cdot (12,5 - 23,26)$$

$$= 13'461,58 \ cm^4$$

---

3) Assi Principali di Inerzia

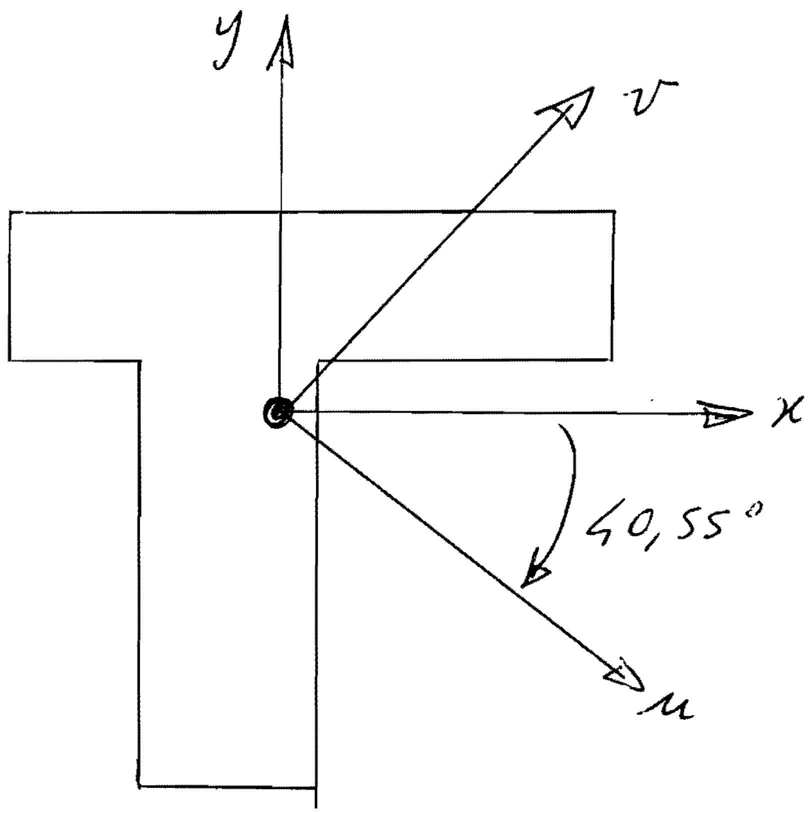


$$\tan(2\alpha_0) = \frac{-2 J_{xy}}{J_x - J_y} = \frac{-2 \cdot 13'461,58}{63'468,44 - 59'262,18}$$

$$\tan(2\alpha_0) = -6,4 \longrightarrow 2\alpha_0 = ATAN(-6,04)$$

$$= -81,11^\circ$$

$$\alpha_0 = -40,55^\circ$$



$$J_u = J_{max} = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

$$\cong \frac{63\text{'}468 + 59262}{2} + \sqrt{\left(\frac{63468 - 59262}{2}\right)^2 + 13\text{'}461^2}$$

$$= 61365 + 13\text{'}624 = 74\text{'}989 \ \text{cm}^4$$

$$J_v = J_{MIN} = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

$$\cong 61365 - 13624 = 47741 \ \text{cm}^4$$