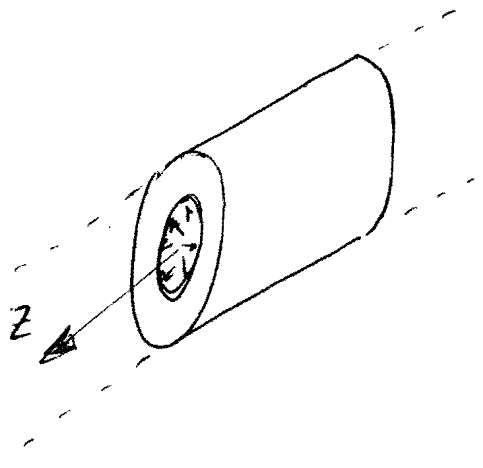
ESERCITAZIONE 06 - 12 - 2011

Meccanica dei Solidi
Bovisa

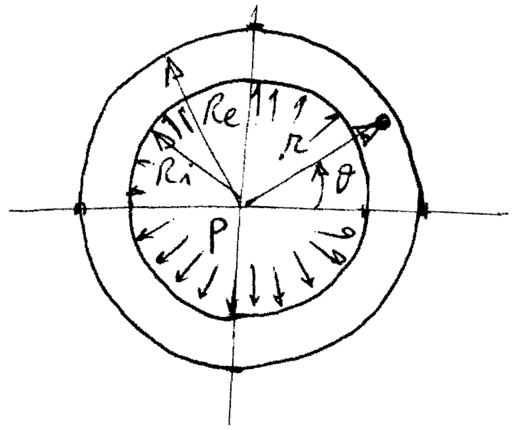
Tubo in pressione: Teoria ed Esercizi

Caratteristiche del problema:

1) Cilindro cavo in materiale elastico lineare omogeneo ed isotropo
2) Pressione interna $P_i = P$, pressione esterna $P_e = 0$
3) Forze di volume trascurabili
4) Condizione di "deformazione piana" (no spostamenti assiali).
5) Obiettivo: calcolare gli sforzi nel cilindro

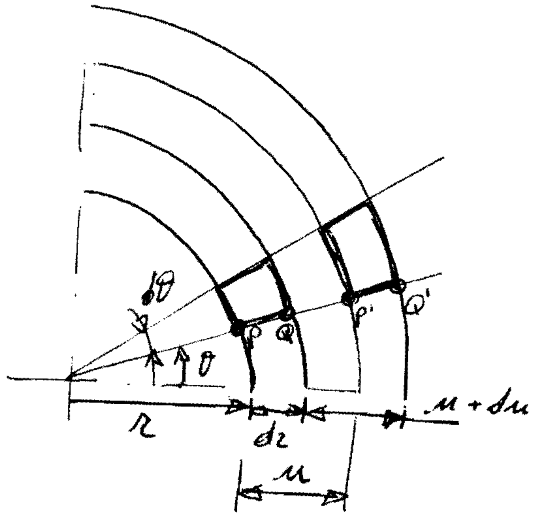


Problema Assialsimmetrico:
Sistema di Riferimento CILINDRICO
$(r - \theta - z)$



Trattazione Teorica di LAMÉ:

Modello Cinematico:



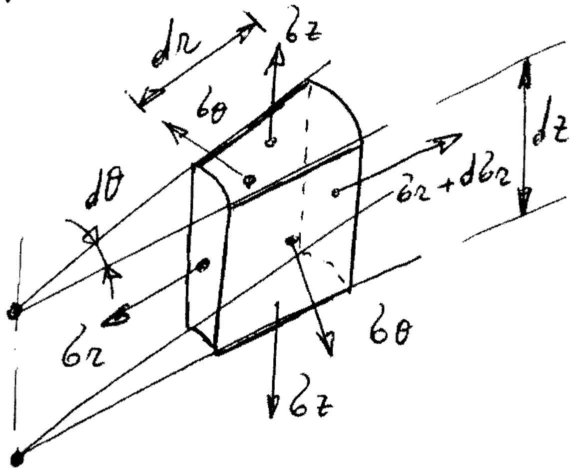
u è lo spostamento radiale

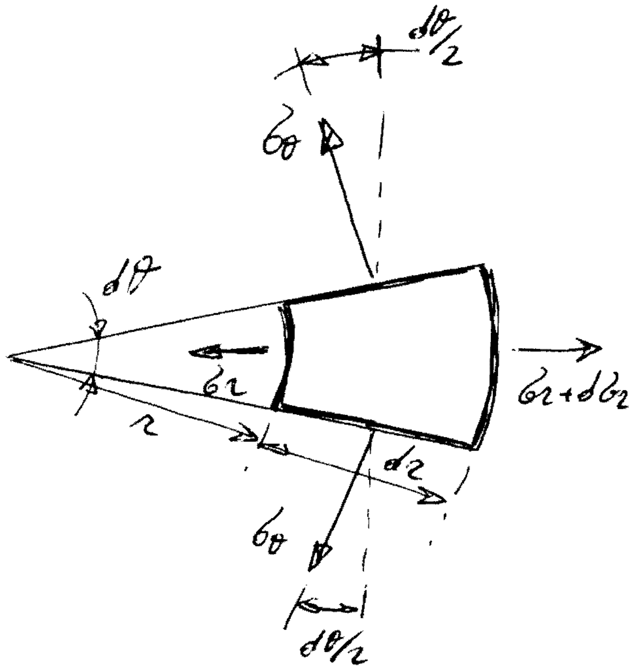
$$\varepsilon_r(r) = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{du}{dr}$$

$$\varepsilon_\theta(r) = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

$$\varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Rapporto tra le varie componenti di Sforzo:





Equazione di Equilibrio in direzione radiale:

$$-\sigma_r \cdot r \cdot d\theta + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) \cdot d\theta - 2\sigma_\theta \cdot dr \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

Modello di Legame costitutivo elastico (costanti di Lamé λ e G)

$$\begin{cases} \sigma_r(r) = (\lambda + 2G)\cdot \varepsilon_r + \lambda \varepsilon_\theta \\ \sigma_\theta(r) = (\lambda + 2G)\cdot \varepsilon_\theta + \lambda \varepsilon_r \\ \sigma_z(r) = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \end{cases}$$

Sostituendo le equazioni del legame elastico e del modello cinematico nella equazione di equilibrio si ottiene:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \implies (\lambda + 2G)\frac{d^2u}{dr^2} + \lambda\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right) + 2G\frac{\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)}{r} = 0$$

La soluzione di questa equazione differenziale è:

$$u(r) = \frac{1}{2}a\cdot r + \frac{b}{r}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{2}a - \frac{b}{r^2} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{2}a + \frac{b}{r^2} \end{cases}$$

$$\sigma_r = (\lambda + 2G)\left(\frac{1}{2}a - \frac{b}{r^2}\right) + \lambda\left(\frac{1}{2}a + \frac{b}{r^2}\right) \longrightarrow$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

$$\sigma_r(r = R_i) = -p$$
$$\sigma_r(r = R_e) = 0$$

$$\downarrow$$

$$a,\ b$$

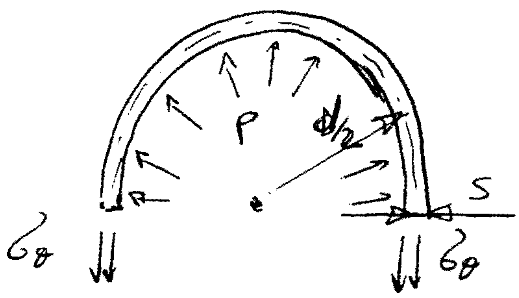
$$\begin{cases} \sigma_r = - \dfrac{p_i \left(\beta^2 - \rho^2\right)}{\left(\beta^2 - 1\right) \cdot \rho^2} \\[2em] \sigma_\theta = \dfrac{p_i \left(\beta^2 + \rho^2\right)}{\left(\beta^2 - 1\right) \rho^2} \end{cases}$$

$$\beta = \frac{R_e}{R_i} \qquad \rho = \frac{r}{R_i}$$

Trattazione Approssimata di Mariotte:

Ipotesi Aggiuntiva: Sforzi circonferenziali costanti sullo spessore.

Oss: l'ipotesi è verosimile solo in caso di Tubo <u>sottile</u> $\left(s < \frac{D}{20}\right)$.



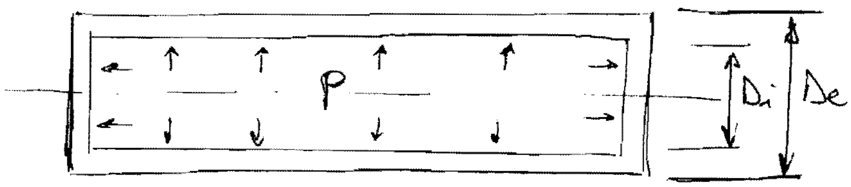
equazione di equilibrio in direzione verticale:

$$p \cdot d_i - \sigma_\theta \cdot 2s = 0$$

$$\boxed{\sigma_\theta = \frac{p\, d_i}{2s}}$$

Osservazione: In caso di Tubo sottile $d_i \cong d_e \cong d_m = \dfrac{d_i + d_e}{2}$

ESEMPIO 1: Verifica di RESISTENZA



DATI:

$D_i = 1000$ mm

$D_e = 1500$ mm

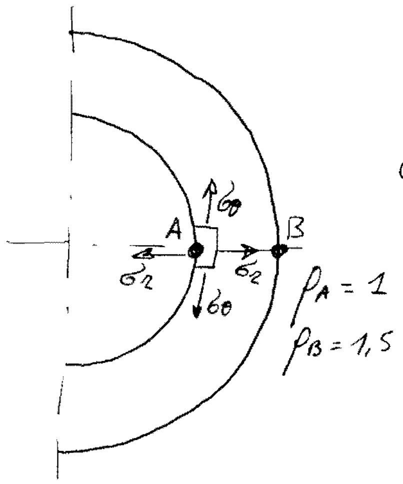
$p = 500$ bar $= 50$ MPa

Materiale

S235

$\sigma_{am} = \frac{\sigma_s}{1.3} = \frac{235}{1,3} \cong 180$ MPa

$\beta = 1,5$



Formule di LAMÉ

$$\sigma_{\theta A} = \frac{p \cdot (\beta^2 + \rho^2)}{(\beta^2 - 1) \cdot \rho^2} = \frac{50 \cdot (1,5^2 + 1^2)}{(1,5^2 - 1) \cdot 1^2} = 130 \text{ MPa}$$

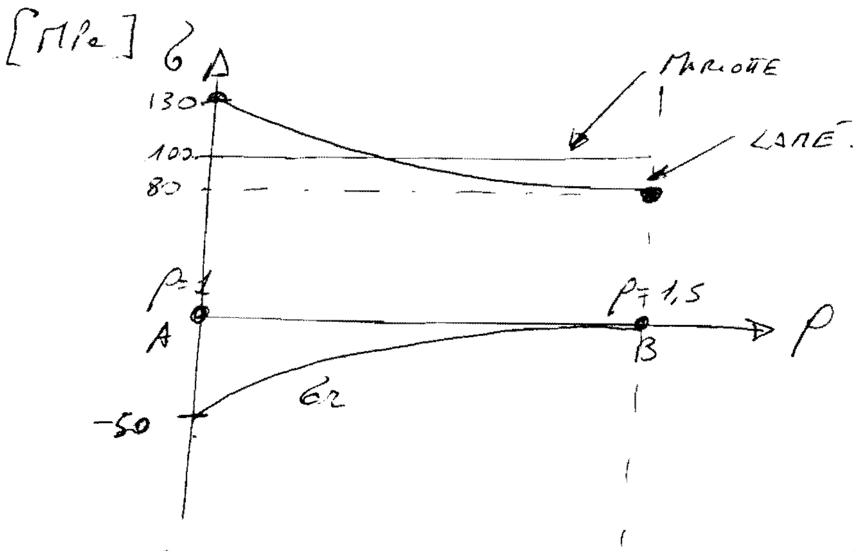
$$\sigma_{\theta B} = \frac{p \cdot (1,5^2 + 1,5^2)}{(1,5^2 - 1) \cdot 1,5^2} = 80 \text{ MPa}$$

$\sigma_{rA} = -50$ MPa

$\sigma_{rB} = 0$

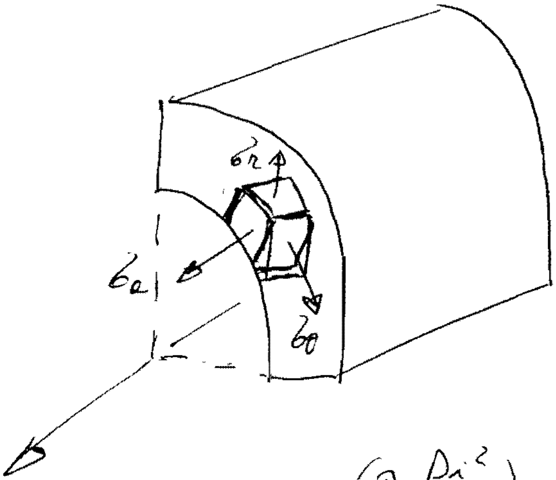
Formula di MARIOTTE

$$\sigma_\theta = \frac{p \cdot D_i}{2 s} = \frac{50 \cdot 1000}{2 \cdot 250} = 100 \text{ MPa}$$



OSSERVAZIONE: Per grosso spessore Mariotte è troppo a sfavore di sicurezza.

Sforzi Assiali



$$\sigma_a = \frac{p \cdot \left(\pi \frac{D_i^2}{4}\right)}{\left(\frac{\pi D_e^2}{4} - \frac{\pi D_i^2}{4}\right)} = \frac{50 \cdot 1000^2}{1500^2 - 1000^2} = 40 \text{ MPa}$$

Verifica di Resistenza Secondo Von Mises:

Intradosso: Punto A

$$\sigma_r = -50 \text{ MPa} \; ; \; \sigma_\theta = 130 \text{ MPa} \; ; \; \sigma_a = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM,A} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_a^2 - \sigma_r \cdot \sigma_\theta - \sigma_r \cdot \sigma_a - \sigma_\theta \sigma_a}$$

$$= \sqrt{50^2 + 130^2 + 40^2 + 50 \cdot 130 + 50 \cdot 40 - 130 \cdot 40}$$

$$= 155{,}8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM,A} < \sigma_{AMM} \rightarrow \text{OK}$$

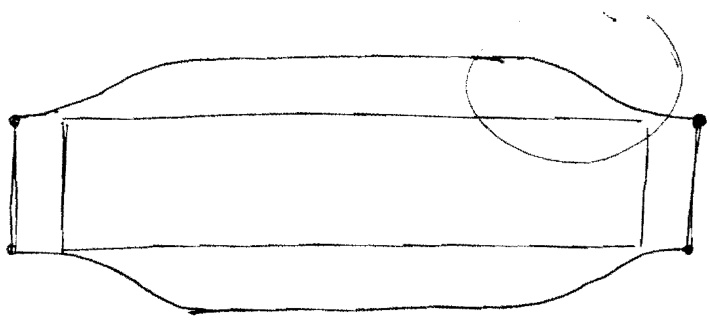
Estradosso: Punto B:

$$\sigma_r = 0 \; ; \; \sigma_\theta = 80 \text{ MPa} \; ; \; \sigma_a = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM,B} = \sqrt{\sigma_\theta^2 + \sigma_a^2 - \sigma_\theta \cdot \sigma_a} = \sqrt{80^2 + 40^2 - 80 \cdot 40} = 69{,}3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM,B} < \sigma_{VM,A} < \sigma_{AM} \rightarrow \text{OK}$$

Attenzione la verifica è valida solo nella zona centrale, distante dagli effetti di bordo



Esercizio 2 : Dimensionamento Tubo in pressione

Il dimensionamento si basa sull'osservazione che la componente di sforzo maggiore è la σ_θ all'intradosso!

$P = 200$ bar $= 20$ MPa
$D_{est} = 500$ mm
$\sigma_{AMM} = 210$ MPa   (S 275, $\eta = 1{,}3$)
D_{int} ?

$\sigma_{\theta AMM} = 150$ MPa ;

$$\sigma_{\theta,A} = \frac{P \cdot (\beta^2 + 1)}{(\beta^2 - 1)} \longrightarrow \sigma_{\theta AMM} = \frac{P \cdot \beta^2 + P}{\beta^2 - 1}$$

$$\sigma_{\theta AMM} \cdot \beta^2 - \sigma_{\theta AMM} = P \cdot \beta^2 + P$$

$$\beta^2 (\sigma_{\theta AMM} - P) = P + \sigma_{\theta AMM}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{P + \sigma_{\theta AMM}}{\sigma_{\theta AMM} - P}} = \sqrt{\frac{170}{130}} = 1{,}143$$

$$D_{INT\,MAX} = \frac{D_{EST}}{\beta} = 437{,}44 \text{ mm}$$

$$\downarrow$$

$$D_i = 430 \text{ mm}$$

$$\downarrow$$

$D_e = 500$ mm

$D_i = 430$ mm

$\beta = 1{,}162$

Verifica: (INTRADOSSO)

$$\sigma_{\theta,A} = 20 \cdot \frac{(1{,}162^2+1)}{(1{,}162^2-1)} = 134{,}2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r,A} = -20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{A,A} = \frac{p \cdot D_i^2}{D_e^2 - D_i^2} = 56{,}8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM,A} = \sqrt{134{,}2^2 + 20^2 + 56{,}8^2 + 20 \cdot 134{,}2 + 20 \cdot 56{,}8 - 134{,}2 \cdot 56{,}8}$$

$$\sigma_{VM,A} = 133{,}5 \text{ MPa} < \sigma_{AMM} \longrightarrow \text{OK}$$

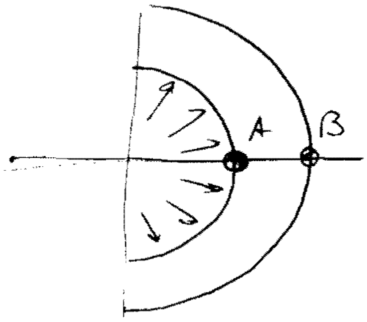
ESEMPIO NUMERICO: AGGIUNTIVO

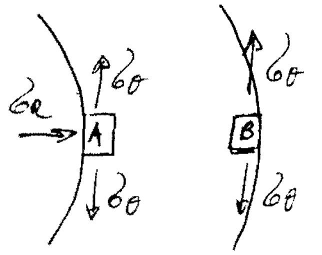
1) TUBO di GROSSO SPESSORE:

$R_i = 25$ mm

$R_e = 30$ mm

$p = 100$ bar $= 10$ MPa





$$\beta = \frac{R_e}{R_i} = 1{,}2$$

$$\rho = \frac{r}{R_i} \nearrow \rho_A = 1 \quad \searrow \rho_B = 1{,}2$$

FORMULE DI LAMÉ:

$$\sigma_r(A) = -p = -10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_r(B) = 0$$

$$\sigma_r = -\frac{p(\beta^2-\rho^2)}{(\beta^2-1)\rho^2}$$

$$\sigma_\theta(A) = \frac{p(\beta^2+\rho^2)}{(\beta^2-1)\rho^2} = \frac{10\cdot(1{,}2^2+1^2)}{(1{,}2^2-1)\cdot 1^2} = 55{,}45 \text{ MPa}$$

$$\sigma_\theta(B) = \frac{p(\beta^2+\rho^2)}{(\beta^2-1)\cdot\rho^2} = \frac{10(1{,}2^2+1{,}2^2)}{(1{,}2^2-1)\cdot 1{,}2^2} = 45{,}45 \text{ MPa}$$

FORMULA DI MARIOTTE

$$\sigma_\theta = \frac{p\cdot D_i}{2s} = \frac{10\cdot 50}{2\cdot 5} = \frac{500}{10} = 50 \text{ MPa}$$