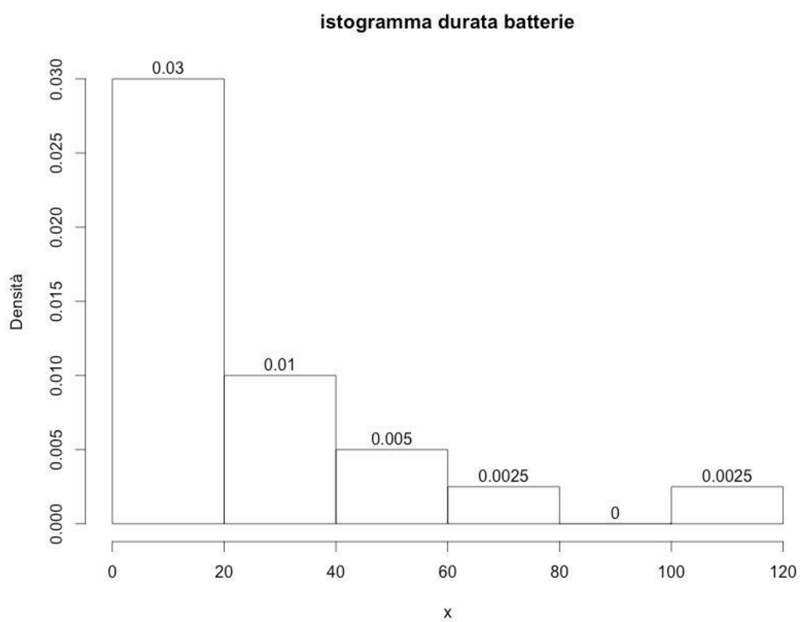
Politecnico di Milano - Scuola di Ingegneria Industriale

I PROVA IN ITINERE DI STATISTICA PER INGEGNERIA ENERGETICA
4 maggio 2012

Cognome, Nome e Numero di matricola:

Problema 1. La Pear Inc. immette sul mercato un nuovo modello di smartphone, il yPhone 16Z. L'istogramma sottostante rappresenta la distribuzione della durata delle batterie di 20 yPhone 16Z, espressa in ore, dopo una carica completa, con wi-fi acceso e utilizzo regolare.



Per le 20 batterie ispezionate, costruire

1. la tabella delle frequenze assolute, relative e relative cumulate,

e calcolare, in modo approssimato,

2. la durata mediana,
3. la durata media,
4. la percentuale di batterie ispezionate che hanno avuto una durata superiore ai 2 giorni.

Risultati.

1. Le frequenze relative si ottengono moltiplicando il valore di densità di ogni singola barra per la rispettiva ampiezza, in questo caso costante e pari a 20; le frequenze assolute si ottengono naturalmente moltiplicando per n quelle relative. La tabella delle frequenze è quindi la seguente:

Classe	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza relativa cumulata
$[0, 20]$	12	0.6	0.6
$(20, 40]$	4	0.2	0.8
$(40, 60]$	2	0.1	0.9
$(60, 80]$	1	0.05	0.95
$(80, 100]$	0	0	0.95
$(100, 120]$	1	0.05	1

2. La classe $[0, 20]$ contiene più del 50% dei dati, quindi la mediana m si trova al suo interno; in particolare, utilizzando una distribuzione uniforme dei dati all'interno della classe, dobbiamo imporre che $(m - 0) \cdot 0.03 = 0.5$, da cui si ottiene $m = 16.66667$.

3. La media μ si può calcolare invece nel modo seguente: se f_k è la frequenza relativa e c_k il punto medio della classe k, per $k = 1, \ldots, 6$, abbiamo:

$$\mu = \sum_{k=1}^{6} f_k c_k = 26.$$

4. Utilizzando ancora una distribuzione uniforme dei dati all'interno delle classi, la frequenza richiesta approssimativamente vale

$$(60 - 48) \cdot 0.005 + \sum_{k=4}^{6} f_k = 0.06 + 0.05 + 0 + 0.05 = 0.16,$$

ovvero il 16%.

Problema 2. Nel villaggio dei puffi, tutti sono innamorati di puffetta, e spesso le fanno dei regali per cercare di fare breccia nel suo cuore. L'esperta puffologa di fama mondiale Nadia è riuscita a determinare che i regali giungono a puffetta secondo un processo di Poisson e che la probabilità che per un giorno intero (24 ore) nessun puffo faccia un regalo a puffetta è pari a 0.6065.

1. Calcolare il numero di regali al giorno ricevuti mediamente da puffetta.
2. Determinare quanto tempo passa mediamente fra l'arrivo di due regali.
3. Calcolare la probabilità che puffetta riceva almeno due regali in due giorni.
4. Si sa che puffetta è anche molto vanitosa, e le piace vantarsi dei regali ricevuti dagli altri puffi. Una sera viene invitata a cena da grande puffo, e durante la conversazione, per farsi bella agli occhi del capo del villaggio esclama: "I puffi mi vogliono talmente bene che solo nell'ultimo anno mi avranno fatto almeno 200 regali. Sono talmente tanti che non so dove metterli!". Calcolare, con un'opportuna approssimazione, la probabilità che puffetta abbia detto la verità relativamente ai regali ricevuti nell'ultimo anno.
5. Puffetta ha appena ricevuto una splendida orchidea dal puffo giardiniere. Per gioco, scommette con quattrocchi che riceverà sicuramente un nuovo regalo entro i prossimi tre giorni. Qual è la probabilità che puffetta vinca la scommessa fatta con quattrocchi?

Risultati.

Sia $N(t)$ il numero di regali ricevuti da puffetta in t giorni e sia T il tempo di attesa (in giorni) fra due regali. Si ha quindi $N(t) \sim Po(\lambda t)$ e $T \sim Exp(\lambda)$

1. $P(N(1) = 0) = e^{-\lambda} = 0.6065 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}[N(1)] = \lambda = -\log(0.6065) = 0.5$.
2. $\mathbb{E}[T] = 1/\lambda = 2$.
3. $P(N(2) \geq 2) = 1 - P(N(2) \leq 1) = 1 - P(N(2) = 0) - P(N(2) = 1) = 1 - e^{-2\cdot 0.5} - 2 \cdot 0.5e^{-2\cdot 0.5} = 0.2642$
4. $N(365) \sim Po(182.5) \simeq N(182.5, 182.5)$, di conseguenza:
$$P(N(365) \geq 200) \simeq P\left(Z \geq \frac{199.5 - 182.5}{\sqrt{182.5}}\right) = 1 - P(Z < 1.26) = 1 - \Phi(1.26) = 0.1038$$
5. $P(T \leq 3) = 1 - e^{-3\cdot 0.5} = 0.7769$.

Problema 3. Secondo "La Canzone dei Puffi" i folletti blu sono alti su per giù due mele o poco più. Nadia, la solita puffologa di fama mondiale, è riuscita a determinare la forma della densità della variabile aleatoria X che misura l'altezza in cm di un puffo (nel sistema internazionale di misura dei puffi, una mela equivale a 5 cm):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 9 \\ (x-9)^2 & 9 \leq x < 10 \\ \alpha(x-12)^2 & 10 \leq x < 12 \\ 0 & x \geq 12 \end{cases}$$

(a) Trovare il valore di α tale per cui $f(x)$ sia un densità di probabilità e disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

(b) Calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ e disegnarne un grafico qualitativo.

(c) Qual è la probabilità che puffo inventore sia alto più di due mele?

Si assuma d'ora in poi che le altezze dei puffi siano variabili aleatorie indipendenti.

(d) Qual è la probabilità che almeno uno tra puffo golosone, puffo pittore e puffetta sia alto più di due mele?

Grazie al valore di α da voi trovato, Nadia ha calcolato che $E[X] = \frac{41}{4}$ e $Var(X) = \frac{19}{80}$. Inoltre, da grande esperta qual è, è l'unica a conoscenza della grande passione dei puffi per il frisbee. Un giorno il frisbee lanciato da Quattrocchi finisce su un ramo alto 12 metri e 4 centimetri.

(e) Calcolare la probabilità approssimata che 118 puffi scelti a caso, messi uno sopra l'altro, riescano a recuperare il frisbee.

(f) Calcolare il numero minimo di puffi che devono adoperarsi al recupero del frisbee perchè, con una probabilità almeno del 99,9%, possano tornare a giocare.

Risultati.

(a) $f(x) \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0$.
$\int f(x) = 1 \Rightarrow \int_9^{10}(x-9)^2 dx + \alpha \int_{10}^{12}(x-12)^2 dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} + \alpha\frac{8}{3} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$.

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 9 \\ \frac{(x-9)^3}{3} & 9 \leq x < 10 \\ 1 + \frac{(x-12)^3}{12} & 10 \leq x < 12 \\ 1 & x \geq 12 \end{cases}$$

(c) $P(X > 10) = 1 - F(10) = \frac{2}{3}$.

(d) $1 - P(X \leq 10)^3 = 1 - F(10)^3 = \frac{26}{27} \simeq 0.963$.

(e) $P(\sum_{i=1}^{118} X_i \geq 1204) = P(Z \geq \frac{1204 - 118\frac{41}{4}}{\sqrt{118\frac{19}{80}}}) = 1 - \Phi(-1.04) = \Phi(1.04) = 0.8508$

(f) $P(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 1204) = P(Z \geq \frac{1204 - n\frac{41}{4}}{\sqrt{n\frac{19}{80}}}) \geq 0.999 \Rightarrow \Phi(\frac{n\frac{41}{4} - 1204}{\sqrt{n\frac{19}{80}}}) \geq 0.999$

$\Rightarrow \frac{n\frac{41}{4} - 1204}{\sqrt{n\frac{19}{80}}} \geq 3.1 \Rightarrow n \geq 119.07 \Rightarrow n \geq 120.$

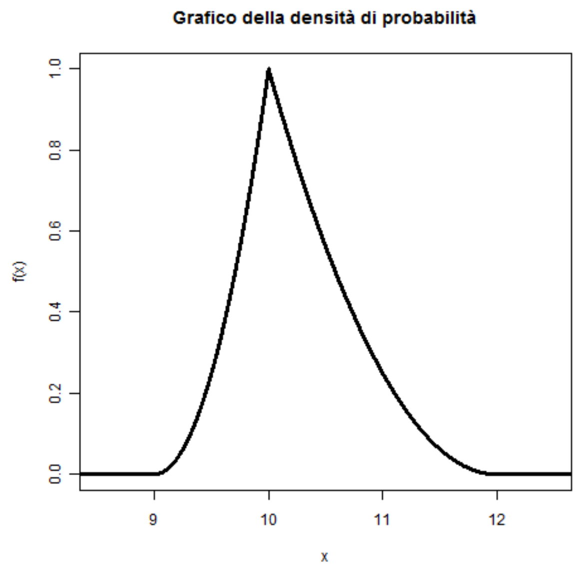


Figura 1: grafico della funzione densità $f(x)$

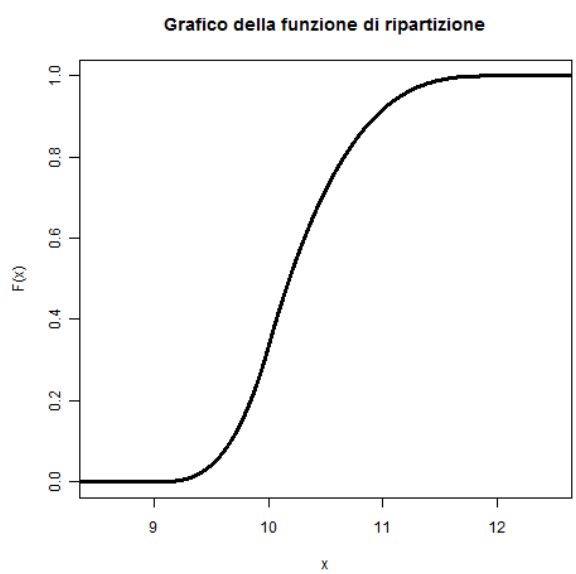


Figura 2: grafico della funzione di ripartizione $F(x)$