Politecnico di Milano - Scuola di Ingegneria Industriale

I Prova in Itinere di Statistica per Ingegneria Energetica
6 maggio 2011

Cognome, Nome e Numero di matricola:

Problema 1. Un'industria farmaceutica misura la concentrazione di potassio nel sangue di 50 pazienti a cui é stato somministrato un farmaco. La seguente tabella sintetizza le misure raccolte:

Classi	**Freq. Assoluta**
(3,4]	7
(4,4.5]	12
(4.5,5]	18
(5,5.5]	8
(5.5,6]	5

(a) Si costruisca la tabella delle frequenze relative e cumulate.

(b) Si rappresenti tramite istogramma la distribuzione delle misure raccolte.

(c) Si individui la classe modale.

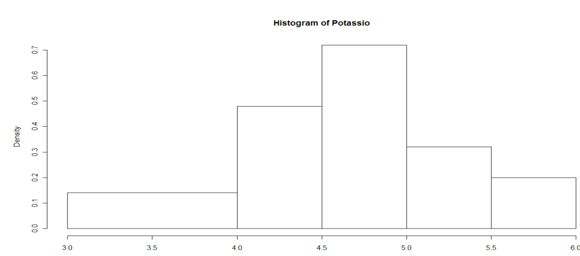
(d) Si determinino le classi contenenti i quartili.

(e) Valutare in modo approssimato mediana, media e varianza delle concentrazioni osservate.

Risultati: (a)

Classi	**Freq. Assoluta**	**Freq. Relativa**	**Freq. Cumulata**
(3,4]	7	0.14	0.14
(4,4.5]	12	0.24	0.38
(4.5,5]	18	0.36	0.74
(5,5.5]	8	0.16	0.9
(5.5,6]	5	0.1	1

(b)



(c) La classe modale: $(4.5, 5]$.

(d) $Q_1 \in (4, 4.5]$,$Q_2 \in (4.5, 5]$, $Q_3 \in (5, 5.5]$.

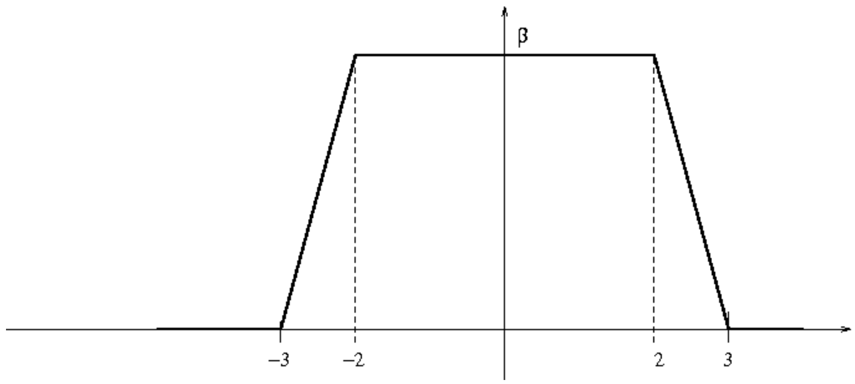
(e)

$$Q_2 \simeq 4.5 + 0.5 * (\frac{0.5 - 0.38}{0.36}) = 4.\bar{6}$$

$$\bar{x} \simeq 3.5 \cdot 0.14 + 4.25 \cdot 0.24 + 4.75 \cdot 0.36 + 5.25 \cdot 0.16 + 5.75 \cdot 0.1 = 4.635$$

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{50}[7 \cdot (3.5 - 4.635)^2 + 12 \cdot (4.25 - 4.635)^2 + 18 \cdot (4.75 - 4.635)^2 + 8 \cdot (5.25 - 4.635)^2 + 5 \cdot (5.75 - 4.635)^2] = 0.405525$$

Problema 2. Il professor Yamane sta progettando un dispositivo per rilevare se un proiettile attraversa un bersaglio olografico determinando l'altezza a cui il proiettile colpisce l'ologramma. Un prototipo del dispositivo dovrebbe registrare il passaggio di un proiettile solo nel caso in cui questo colpisca il bersaglio ad un'altezza compresa fra -2 cm e 2 cm, ma errori di funzionamento fan sì che la distribuzione delle possibili altezze X di un proiettile rilevato sia in realtà data da una funzione f del tipo:



(a) Determinare β in modo che il grafico in figura risulti effettivamente il grafico di una densità di probabilità.

(b) Quale percentuale di proiettili rilevati colpisce effettivamente il bersaglio ad un'altezza X compresa fra -2 cm e 2 cm?

(c) Si scriva un'espressione analitica della densità $y = f(x)$.

(d) Si calcoli l'altezza attesa di un proiettile rilevato dal dispositivo.

(e) Si calcoli la deviazione standard dell'altezza di un proiettile rilevato dal dispositivo.

Risultati:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \qquad \iff \qquad \beta = 1/5.$

(b) $P(-2 < X < 2) = 4/5 = 0.8 = 80\%.$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -3, \\ \dfrac{3+x}{5}, & \text{se } -3 \leq x \leq -2, \\ 1/5, & \text{se } -2 \leq x \leq 2, \\ \dfrac{3-x}{5}, & \text{se } 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$

(d) $\mathbb{E}X = 0$ per simmetria.

(e) $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} = \sqrt{\dfrac{13}{6}} = 1.472.$

Problema 3. Un pescatore molto abile passa la domenica sulle rive di un torrente a pescare. Il numero di trote pescate è ben descritto da un processo di Poisson. Mediamente il numero di trote pescate in mezz'ora è pari a 5.

(a) Si calcoli la probabilità che in 1 minuto il pescatore peschi al massimo una trota.

(b) Si calcoli la probabilità che in 2 minuti vengano pescate più di 2 trote.

(c) Si calcoli, con una opportuna approssimazione, la probabilità che in 2 ore vengano pescate almeno 25 trote.

Per pescare nel torrente purtroppo viene introdotta una licenza a tempo a pagamento: una licenza da n minuti consente di pescare ogni domenica per n minuti. Il pescatore vi chiede quindi una consulenza.

(d) Calcolare il minimo n con cui la probabilità di pescare almeno 25 trote risulti almeno del 25%.

Risultati: Sia N_t il numero di trote pescate in t minuti, $N_t \sim P(\lambda t)$. Dato che il numero medio di trote pescate in 30 minuti è pari a $30\lambda = 5$, si ottiene $\lambda = 1/6$ e quindi $N_t \sim P(\frac{1}{6}t)$.

(a) $N_1 \sim P(\frac{1}{6})$ rappresenta il numero di trote pescate in 1 minuto; la probabilità che in 1 minuto il pescatore peschi al massimo una trota è quindi

$$P(N_1 \leq 1) = P(N_1 = 0) + P(N_1 = 1) = e^{-1/6} + \frac{1}{6}e^{-1/6} = 0.9876$$

(b) $N_2 \sim P(\frac{1}{3})$ rappresenta il numero di trote pescate in 2 minuti; la probabilità che in 2 minuti il pescatore peschi più di 2 trote è quindi

$$\begin{aligned} P(N_2 > 2) &= 1 - P(N_2 \leq 2) = 1 - P(N_1 = 0) - P(N_1 = 1) - P(N_2 = 2) \\ &= 1 - e^{-1/3} - \frac{1}{3}e^{-1/3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 e^{-1/3} \\ &= 0.0048 \end{aligned}$$

(c) Il numero di trote pescate in 2 ore è $N_{120} \sim P(20)$. La probabilità cercata può essere approssimata grazie al TCL (dato che $\lambda t > 5$) nel seguente modo

$$P(N_{120} \geq 25) = 1 - P(N_{120} \leq 24.5) \approx 1 - \phi\left(\frac{24.5 - 20}{\sqrt{20}}\right) = 1 - \phi(1.0062) = 0.1562$$

(d) Dobbiamo trovare t tale che $P(N_t \geq 25) \geq 0.25$. Poiché $P(N_{120} \geq 25) \approx 0.1562 < 0.25$ la soluzione sarà sicuramente data da un $t > 120$, che possiamo quindi determinare via approssimazione normale:

$$P(N_t \geq 25) = 1 - P(N_t \leq 24.5) \approx 1 - \phi\left(\frac{24.5 - t/6}{\sqrt{t/6}}\right) \geq 0.25$$

$$\frac{24.5 - t/6}{\sqrt{t/6}} < z_{0.25} = 0.674 \qquad \Rightarrow \qquad t > 128.3 \qquad \Rightarrow \qquad n = 129.$$