Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria.
Corso di Laurea in Ingegneria Energetica.
A.A. 2013/2014
Appello 17/07/2014

COGNOME . . . . NOME . . . .

MATRICOLA . . . .   DOCENTI : COLOMBO – PAVANI

Tempo a disposizione: 3h.

1 Determinare la trasformata di Fourier della funzione $\varphi(x)$, sapendo che

$$4\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-t|}\varphi(t)\,dt - 3\varphi(x) = \frac{x^2}{8}e^{-2|x|}.$$

2 Determinare la trasformata di Laplace della funzione $f(x):\begin{cases} 2 & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$, sapendo che

$f(x+\pi) = f(x)$.

3 Determinare utilizzando una funzione ausiliaria, opportunamente scelta, la soluzione del problema $\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 2xe^t + x\sin\frac{t}{2} & x \in R, t \in R^+ \\ u(x,0) = 1 & x \in R \end{cases}$. Verificare il risultato.

4 Determinare le curve caratteristiche e la soluzione del problema del trasporto:

$\begin{cases} u_t(x,y,t) + u_x(x,y,t) - u_y(x,y,t) + 2u(x,y,t) = x & (x,y) \in RxR, t \in R^+ \\ u(x,y,0) = y^2 + x & (x,y) \in RxR \end{cases}$. Verificare il risultato.

****

1. Approssimare la derivata seconda della funzione $y = e^{\sin x}$ in $x = \pi/4$ utilizzando la formula alle differenze centrate con passi di 0.05 , 0.025 , 0.0125 . Calcolare per ogni passo utilizzato il numero di cifre corrette dell'approssimazione calcolata. Lavorare in `format long e`.

Valore esatto: $y'' =$ ____________________ , $\begin{bmatrix} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \\ \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \\ \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{\_\_\_} \\ \text{\_\_\_} \\ \text{\_\_\_} \end{bmatrix}$

2. Gli autovalori della matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 20 & 0 & -20 \\ -4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -20 & 0 & 20 \end{bmatrix}$ determinati mediante il metodo **QR** (nmax iterazioni 33) sono: _____ , _____ , _____ , _____ . Per il calcolo degli autovalori è necessario uno shift reale? _____ (utilizzare se necessario `-10` come shift)

L'approssimazione dell'autovettore associato all'autovalore di modulo massimo calcolata utilizzando il programma **`potenze.m`** con vettore iniziale avente tutte le componenti uguali ad uno, tolleranza 10^{-7} e numero max di iterazioni 33 è _______ , _______ , _______ , _______ , l'approssimazione dell'autovettore associato all'autovalore di modulo massimo calcolata utilizzando la function **`eigs.m`** è _______ , _______ , _______ , _______. La norma infinito della differenza fra le approssimazioni calcolate è: ______________________ . Commentare il risultato ____

____

____

____

____

3. Tracciare il grafico della funzione $y = \frac{x - e^{-x}}{x + \ln x}$ nell'intervallo [0.5 , 2] utilizzando punti equispaziati di 10^{-2} . Approssimando la funzione utilizzando 7 nodi equispaziati sull'intervallo assegnato, si ha che il coefficiente di grado massimo del polinomio interpolante è _______ . Approssimando la funzione utilizzando 7 nodi forniti dagli zeri del polinomi di Chebyshev sull'intervallo assegnato, si ha che coefficiente di grado massimo del polinomio interpolante è _______ . Il valore esatto della funzione per *x* = 0.75 è _______ ; approssimando la funzione nello stesso punto utilizzando il polinomio costruito mediante i nodi equispaziati si ottiene il valore _______ ; confrontando questo valore con il valore esatto si ha un errore assoluto di _______ , quindi l'approssimazione calcolata ha almeno ___ cifre corrette. Approssimando la funzione nello stesso punto e utilizzando il polinomio costruito mediante i nodi zeri dei polinomi di Chebyshev si ottiene il valore _______ ; confrontando questo valore con il valore esatto si ha un errore assoluto di _______ , quindi l'approssimazione calcolata ha almeno ___ cifre corrette. Output in `format short e` . Commentare i risultati ____

____

____

____

____

4. Assegnati il problema $\begin{cases} u_t - u_x = x \\ u(0,t) = 1, u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \frac{4-4x}{4+x^2} \end{cases}$, utilizzando la function `Matlab® pdepe`, discretizzando l'intervallo spaziale [0 1] con 31 nodi e l'intervallo temporale [0 2] con 21 nodi si ottengono nei punti di ascissa 1/3 e 2/3 nei tempi *t* =1 e *t* = 2 le seguenti approssimazioni della soluzione (output in `format long e`):

x = 1/3 , *t* = 1, *u*(*x*,*t*) = ____;

x = 2/3 , *t* = 1, *u*(*x*,*t*) = ____;

x = 1/3 , *t* = 2, *u*(*x*,*t*) = ____;

x = 2/3 , *t* = 2, *u*(*x*,*t*) = ____;

RIPORTARE SULL RETRO DEL FOGLIO IL LISTATO MATLAB

SOLUZIONI

$4\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-t|}\varphi(t)\,dt-3\varphi(x)=\frac{x^2}{8}e^{-2|x|}$. Riconoscendo nel primo la convoluzione delle funzioni $\varphi(x)$, $e^{-2|x|}$ si ha (1) $4e^{-2|x|}*\varphi(x)-3\varphi(x)=\frac{x^2}{8}e^{-2|x|}$. Ricordando che la trasformata di $e^{-2|x|}$ è $\frac{4}{4+\xi^2}$ applicando le proprietà della trasformata $xe^{-2|x|}\to -8i\frac{\xi}{\left(4+\xi^2\right)^2}$ e $x^2e^{-2|x|}\to 8\frac{4-3\xi^2}{\left(4+\xi^2\right)^3}$, applicando alla (1) la trasformata di Fourier si ottiene $\frac{16}{4+\xi^2}\hat{\varphi}(\xi)-3\hat{\varphi}(\xi)=\frac{4-3\xi^2}{\left(4+\xi^2\right)^3}\Rightarrow\frac{4-3\xi^2}{4+\xi^2}\hat{\varphi}(\xi)=\frac{4-3\xi^2}{\left(4+\xi^2\right)^3}\Rightarrow\hat{\varphi}(\xi)=\frac{1}{\left(4+\xi^2\right)^2}$

****

$$f(x):\begin{cases}2 & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}\qquad \hat{f}(\xi)=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\left(2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}e^{-sx}dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}e^{-sx}dx\right)=$$

$$\frac{1}{\left(1+e^{-\frac{1}{2}\pi s}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{2}\pi s}\right)}\left(2\frac{1-e^{-\frac{1}{2}\pi s}}{s}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi s}\frac{1-e^{-\frac{1}{2}\pi s}}{s}\right)=\frac{1}{1+e^{-\frac{1}{2}\pi s}}\left(\frac{2}{s}+\frac{e^{-\frac{1}{2}\pi s}}{2s}\right)=\frac{4+e^{-\frac{1}{2}\pi s}}{2s\left(1+e^{-\frac{1}{2}\pi s}\right)}$$

****

$\begin{cases}u_t(x,t)-u_{xx}(x,t)=2xe^t+x\sin\frac{t}{2} & x\in R,t\in R^+\\ u(x,0)=1 & x\in R\end{cases}$ posto $w(x,t)=\int\left(2xe^t+x\sin\frac{t}{2}\right)dt=$ $2xe^t-2x\cos\frac{t}{2}$ sia $v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)=u(x,t)-2xe^t+2x\cos\frac{t}{2}$.

$v_t(x,t)=u_t(x,t)-2xe^t-x\sin\frac{t}{2}$, $v_x(x,t)=u_x(x,t)-2e^t+\cos\frac{t}{2}$, $v_{xx}(x,t)=u_{xx}(x,t)\Rightarrow$

$v_t(x,t)-v_{xx}(x,t)=u_t(x,t)-2xe^t-x\sin\frac{t}{2}-u_{xx}(x,t)=0$, $v(x,0)=u(x,0)-2x+2x=1$

calcolando la soluzione del problema ottenuto con la trasformata di Fourier si ottiene $v(x,t)=1\Rightarrow$

$1=u(x,t)-2xe^t+2x\cos\frac{t}{2}\Rightarrow u(x,t)=1+2xe^t-2x\cos\frac{t}{2}$

VERIFICA

$u(x,0)=1+2x-2x=1$ $u_t(x,t)=2xe^t+x\sin\frac{t}{2}$, $u_x(x,t)=2e^t-\cos\frac{t}{2}$, $u_{xx}(x,t)=0\Rightarrow$

$u_t(x,t)-u_{xx}(x,t)=2xe^t+x\sin\frac{t}{2}$

****

Le equazioni delle curve caratteristiche, in forma parametrica, sono $\begin{cases}x(s)=x_0+s\\ y(s)=y_0-s\\ t(s)=t_0+s\end{cases}$,

$s \in R,\ (x_0, y_0) \in R^2,\ t_0 \in R^+$, applicando la formula $u(x,y,t) = e^{-ct} g(x-kt, y-ht) +$
$\int_{-t}^{0} e^{cs} f(x+ks, y+hs, t+s)\,ds$ la soluzione è $u(x,y,t) = e^{-2t}\left(x - t + (y+t)^2\right) + \int_{-t}^{0} e^{2s}(x+s)\,ds =$
$e^{-2t}\left(x - t + y^2 + 2yt + t^2\right) + x\int_{-t}^{0} e^{2s}ds + \int_{-t}^{0} se^{2s}ds = e^{-2t}\left(x - t + y^2 + 2yt + t^2\right) + e^{2s}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}s - \frac{1}{4}\right)\Big|_{-t}^{0} =$
$e^{-2t}\left(x - t + y^2 + 2yt + t^2\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + e^{-2t}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + y^2 + 2yt + t^2\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$

VERIFICA

$u(x,y,0) = y^2 + x$;
$u_t(x,y,t) = e^{-2t}\left(-x + t - \frac{1}{2} - 2y^2 - 4yt - 2t^2 - \frac{1}{2} + 2y + 2t\right) = e^{-2t}\left(-x + 3t - 1 + 2y - 4yt - 2y^2 - 2t^2\right)$;
$u_x(x,y,t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}$; $u_y(x,y,t) = e^{-2t}(2y + 2t)$;
$u_t + u_x - u_y + 2u = e^{-2t}\left(-x + 3t - 1 + 2y - 4yt - 2y^2 - 2t^2 + \frac{1}{2} - 2y - 2t + x - t + \frac{1}{2} + 2y^2 + 4yt + 2t^2\right) + \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} = x$

****

```
>> syms x real
>> f=exp(sin(x));f1=diff(f,2)
f1 =
-sin(x)*exp(sin(x))+cos(x)^2*exp(sin(x))
>> format long e
>> ve=-sin(pi/4)*exp(sin(pi/4))+
                                                cos(pi/4)^2*exp(sin(pi/4))
ve =
   -4.200363657252215e-001
>> as=pi/4;h=.1;for n=1:3,h=h/2;a=[as-h as as+h];
                              o=exp(sin(a));va(n)=(o(1)-2*o(2)+o(3))/h^2;
                                                e(n)=abs(ve-va(n));end,va'
ans =
   -4.207386656284839e-001
   -4.202121038353823e-001
   -4.200803104509986e-001
>> n=0;while e(1)<.5*10^(-n),n=n+1;end,n-1
ans =
     2
>> n=0;while e(2)<.5*10^(-n),n=n+1;end,n-1
ans =
     3
>> n=0;while e(3)<.5*10^(-n),n=n+1;end,n-1
ans =
     4
```

****

```
>> a=[0 2 -4 2;0 20 0 -20;-4 2 0 2;0 -20 0 20]
a =

     0     2    -4     2
     0    20     0   -20
    -4     2     0     2
     0   -20     0    20
```

```
>> a1=a;for n=1:33,[q,r]=qr(a1);a1=r*q;end,a1
a1 =
   40.0000    0.0000   -0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000    4.0000   -2.8284
   -0.0000    4.0000   -0.0000    2.8284
         0         0         0    0.0000
non è triangolare superiore non converge

>> a1=a-10*eye(4);for n=1:33,[q,r]=qr(a1);a1=r*q;end,a1+10*eye(4)
ans =
   -4.0000   -0.0000   -0.0000   -4.0000
   -0.0000   40.0000   -0.0000   -0.0000
   -0.0000   -0.0000    4.0000   -0.0000
         0   -0.0000   -0.0000   -0.0000

>> [xx,vv]=eigs(a,1)
xx =
    0.0000
    0.7071
    0.0000
   -0.7071
vv =
   40.0000

>> [v,x,n]=potenze(a,1e-7,33,ones(4,1))
Warning: Divide by zero.
> In potenze at 48
Warning: Divide by zero.
> In potenze at 52
v =
   NaN

x =
   NaN
   NaN
   NaN
   NaN
n =
     1
il vettore assegnato ha la direzione dell’autovettore associato
all’autovalore nullo per cui il programma potenze non converge
come detto ad esercitazione in tal caso è sufficiente cambiare il vettore
iniziale
>> [v,x,n]=potenze(a,1e-7,33,rand(4,1))
v =
   40.0000
x =
   -0.0000
    0.7071
   -0.0000
   -0.7071
n =
     5

>> norm(x-xx,inf)
ans =
   6.5059e-06

*********************************************************************
```

```
>> format short e
>> x=.5:1e-3:2;y=(x-exp(-x))./(x+log(x));
>> a=linspace(.5,2,7);o=(a-exp(-a))./(a+log(a));
>> c=polyfit(a,o,6);c(1)
ans =
  -7.7179e-003
>> p=polyval(c,x);[e,n]=max(abs(p-y));e,x(n)
e =
  5.1453e-005
ans =
  5.7500e-001
>> n1=.5;n2=2;
>> a=(n1+n2)/2+(n2-n1)/2*cos(pi*(1+2*[6:-1:0])/14);
>> o=(a-exp(-a))./(a+log(a));
>> cc=polyfit(a,o,6);cc(1)
ans =
  -8.0976e-003
>> pc=polyval(cc,x);[ec,n]=max(abs(pc-y));ec,x(n)
ec =
  2.1445e-005
ans =
  5.0000e-001
```

****

Memorizzare in tre M-file distinti

```
function [c,f,s]=pdefun(x,t,u,DuDx)
c=1;
f=DuDx;
s=x;

function [pl,ql,pr,qr]=boundcon(xl,ul,xr,ur,t)
pl=ul-1;
ql=0;
pr=ur;
qr=0;

function value=initcon(x)
% dipendente dal tempo e da una dimensione spaziale
value=4*(1-x)/(4+x^2);

>> m=0;x=linspace(0,1,31);t=linspace(0,2,21);
>> u=pdepe(m,@pdefun,@initcon,@boundcon,x,t);
>> [u(11,11) u(11,21)]
ans =
    7.160668220910912e-001    3.950790433573837e-001
>> [u(21,11) u(21,21)]
ans =
    7.160492041252131e-001    3.950615497838728e-001
```