Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria. Corso di Laurea in Ingegneria Energetica.
A.A. 2013/2014 Appello 30/06/2014

COGNOME . . . . NOME . . . .

MATRICOLA . . . . DOCENTI : COLOMBO – PAVANI

Tempo a disposizione: 3h.

1 Determinare, mediante la definizione la trasformata di Laplace della funzione $g(x) = 1$, con le proprietà della trasformata, calcolare la trasformata della funzione: $f(x) = \int_0^x x \sin x \, dx$.

2 Determinare la soluzione, per separazione delle variabili, del problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ , & x^2 + y^2 < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = x^3 - y \ , & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Verificare la compatibilità del problema. Esprimere i risultati in coordinate cartesiane.

3 Sia $u(x,t)$ soluzione continua del problema $\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & 0 \le x \le 1, t \ge 0 \\ u(x,0) = 1 - \cos \pi x & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = te^{-\frac{t}{6}} & t \ge 0 \\ u(1,t) = 1 + e^{-6t} & t \ge 0 \end{cases}$

- mostrare che $u(x,t)$ è non negativa;
- determinare una limitazione superiore per $u(x,t)$.

4 Determinare la soluzione del problema: $\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = e^{-t} & x \in R, t \in R^+ \\ u(x,0) = 0 & x \in R \\ u_t(x,0) = e^{2x} & x \in R \end{cases}$.

Verificare il risultato.

****

RIPORTARE I PRINCIPALI COMANDI DEL LISTATO MATLAB

1 Tracciare nell'intervallo [-π π] il grafico della funzione $y = \dfrac{\sin 2x + 1}{\cos x - 2}$ suddividendo l'intervallo assegnato con 500 nodi. Verificato che la funzione ha due zeri nell'intervallo assegnato, è possibile determinare lo zero di minore ascissa con il metodo di bisezione? ___________________________

____

____

Considerando il punto di ascissa –1 il valore della derivata prima della funzione nel punto è ______________ (`format short`). Utilizzando il metodo di Newton con valore iniziale –1, si ottiene come approssimazione dello zero di minore ascissa il valore (output in `format long e`) ______________________________ in ______ iterazioni. Commentare i risultati.

____

____

____

____

2 Considerata la funzione $y=\dfrac{\cos 2x+1}{\sin x-2}$ nell'intervallo [0 2π], suddividere l'intervallo in cinque nodi equispaziati, l'equazione del polinomio algebrico interpolante la funzione nei nodi determinati è (`format short`) ____ .
L'equazione del polinomio trigonometrico interpolante la funzione nei nodi determinati è (`format short`) ____ .
Considerare ora l'output in `format long e.`
Il valore assunto dalla funzione nel punto di ascissa 3.1 è ____________________________ .
L'approssimazione in 3.1 con il polinomio algebrico è ____________________________ .
L'errore commesso è ______________________________; il numero di cifre esatte è ____ .
L'approssimazione in 3.1 con il polinomio trigonometrico è ____________________________ .
L'errore commesso è ______________________________; il numero di cifre esatte è ____ .

3 Assegnato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2y^2 - y^3 \\ y(0) = 0.001 \end{cases}$ un'approssimazione della soluzione nel tempo t = 2000:
con la function `Matlab® ode113 è:` ____________________________________ .
con la function `Matlab® ode15s è:` ____________________________________ .
Commentare i risultati in termini di efficienza del metodo utilizzato:
____
____
____
____
____
____
____
____

4 Utilizzando il metodo dei trapezi generalizzato determinare un'approssimazione di $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2x+1}{\sin x-2}\,dx$ suddividendo l'intervallo di integrazione in n = 10, 20,40,80 sottointervalli equispaziati. Output in `format long e.`

n = 10 appr. = ________________________ ; n = 20 appr. = ________________________ ;

n = 40 appr. = ________________________ ; n = 80 appr. = ________________________ ;

Il valore esatto dell'integrale è: ____________________________________ .

Gli errori commessi sono rispettivamente:

n = 10 err1. = ________________________ ; n = 20 err2. = ________________________ ;

n = 40 err3. = ________________________ ; n = 80 err4. = ________________________ ;

I rapporti [err1/err2 err2/err3 err3/err4] sono (output in `format short`):

______________ ; ______________ ; ______________ ; commentare i risultati
____
____
____
____
____
____

SOLUZIONI

Per la proprietà della trasformata di Laplace,

$$e^{bx} f(x) \to F(s-b),\ xf(x) \to -\frac{dF(s)}{ds},\ \int_0^x f(t)\,dt \to \frac{F(s)}{s}$$

se $g(x)=1, G(s)=\int_0^{+\infty} e^{-sx}ds = -\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$,

poiché $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\sin x \to \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i}-\frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{2i}\frac{2i}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}$,

$$x\sin x \to -\frac{d\left(\frac{1}{s^2+1}\right)}{ds} = \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2},\ \int_0^x t\sin t\,dt \to \frac{2}{\left(s^2+1\right)^2}$$

****

$$f(\vartheta) = \cos^3\vartheta - \sin\vartheta = \cos\vartheta\cos^2\vartheta - \sin\vartheta = \cos\vartheta\frac{1+\cos 2\vartheta}{2} - \sin\vartheta = \frac{1}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos 2\vartheta - \sin\vartheta =$$
$$\frac{1}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{4}\cos 3\vartheta + \frac{1}{4}\cos\vartheta - \sin\vartheta = \frac{1}{4}\cos 3\vartheta + \frac{3}{4}\cos\vartheta - \sin\vartheta$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\cos 3\vartheta + \frac{3}{4}\cos\vartheta - \sin\vartheta\right)d\vartheta = \frac{1}{12}\sin 3\vartheta + \frac{3}{4}\sin\vartheta + \cos\vartheta\Big|_0^{2\pi} = 1-1=0$$

da $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n\cos n\theta + \sum_{n=1}^{+\infty} nd_n \sin n\theta = \frac{1}{4}\cos 3\vartheta + \frac{3}{4}\cos\vartheta - \sin\vartheta \Rightarrow c_1 = \frac{3}{4}, c_3 = \frac{1}{12}, d_1 = -1 \Rightarrow$

$$u(\rho,\vartheta) = k + \frac{1}{12}\rho^3\cos 3\vartheta + \frac{3}{4}\rho\cos\vartheta - \rho\sin\vartheta$$

$$k + \frac{1}{12}\rho^3\cos(\vartheta+2\vartheta) + \frac{3}{4}\rho\cos\vartheta - \rho\sin\vartheta = k + \frac{1}{12}\rho^3\cos\vartheta\cos 2\vartheta - \frac{1}{12}\rho^3\sin\vartheta\sin 2\vartheta + \frac{3}{4}\rho\cos\vartheta - \rho\sin\vartheta =$$
$$k + \frac{1}{12}\rho^3\cos^3\vartheta - \frac{1}{4}\rho^3\sin^2\vartheta\cos\vartheta + \frac{3}{4}\rho\cos\vartheta - \rho\sin\vartheta \Rightarrow k + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}xy^2 + \frac{3}{4}x - y = u(x,y)$$

$$u_x(x,y) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4},\ u_y(x,y) = -\frac{1}{2}xy - 1 \Rightarrow \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}xy^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}xy^2 - y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}xy^2 + \frac{3}{4}x - y =$$
$$\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x\left(1-x^2\right) + \frac{3}{4}x - y = x^3 - y$$

****

Posto $I = \{x \in R : 0 \le x \le 1\}$, $u(x,0) = 1-\cos\pi x \ge 0 \Rightarrow \forall x \in I$, $u(0,t) = te^{-\frac{t}{6}} \ge 0 \Rightarrow \forall t \in R^+$,
$u(1,t) = 1+e^{-6t} \ge 0 \Rightarrow \forall t \in R^+$; la soluzione $u(x,t)$ è sempre non negativa.

$$u(x,0) = 1-\cos\pi x \Rightarrow 0 \le u(x,0) \le 2$$

$$u(0,t) = te^{-\frac{t}{6}} \Rightarrow u_t(0,t) = \left(1-\frac{t}{6}\right)e^{-\frac{t}{6}} \ge 0 \Rightarrow t \le 6 \Rightarrow 0 \le u(0,t) \le \frac{6}{e} \sim 2.207$$

$$u(1,t) = 1+e^{-6t} \Rightarrow u_t(1,t) = -6e^{-6t} \ge 0 \Rightarrow \varnothing \Rightarrow 1 < u(1,t) \le 2$$

la funzione è limitata da 2.207.

****

La soluzione è $u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^{2y}dy+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-s}^{x+s} e^{s-t}dyds=\frac{1}{4}e^{2x+2t}-\frac{1}{4}e^{2x-2t}+e^{-t}\int_0^t se^s ds=$
$\frac{1}{4}e^{2x+2t}-\frac{1}{4}e^{2x-2t}+e^{-t}\left(te^t-e^t+1\right)=\frac{1}{4}e^{2x+2t}-\frac{1}{4}e^{2x-2t}+e^{-t}+t-1$

VERIFICA

$u(x,0)=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+1-1=0$;
$u_t(x,t)=\frac{1}{2}e^{2x+2t}+\frac{1}{2}e^{2x-2t}-e^{-t}+1$, $u_t(x,0)=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{2x}-1+1=e^{2x}$; $u_{tt}(x,t)=e^{2x+2t}-e^{2x-2t}+e^{-t}$
$u_x(x,t)=\frac{1}{2}e^{2x+2t}-\frac{1}{2}e^{2x-2t}$; $u_{xx}(x,t)=e^{2x+2t}-e^{2x-2t}$;
$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=e^{2x+2t}-e^{2x-2t}+e^{-t}-e^{2x+2t}+e^{2x-2t}=e^{-t}$

****

```
>> x=linspace(-pi,pi,500);y=(sin(2*x)+1)./(cos(x)-2);plot(x,y)
>> syms x real
>> f=(sin(2*x)+1)./(cos(x)-2)
f =
 (sin(2*x)+1)/(cos(x)-2)

>> f1=diff(f)
f1 =
2*cos(2*x)/(cos(x)-2)+(sin(2*x)+1)/(cos(x)-2)^2*sin(x)

>> x=-1;eval(f1)
ans =
    5.343616165100964e-001

>> x0=-0.5;n=0;while abs(x-x0)>1e-6,n=n+1;x0=x;x=x-
                                                   eval(f)/eval(f1);end,x,n
x =
   -7.853988697601192e-001
n =
    18
```

****

```
>> a=linspace(0,2*pi,5);o=(cos(2*a)+1)./(sin(a)-2);
>> c=polyfit(a,o,4),
c =
    -0.0548    0.6880   -2.7019    3.3953   -1.0000

>> a=a(1:end-1);o=o(1:end-1);
>> m=[cos(2*a') sin(a') cos(a') ones(4,1)];cond(m),ct=m\o'
ans =
    1.4142
ct =
   -0.5000
   -0.0000
    0.0000
   -0.5000
```

come affermato più volte a lezione nel caso di polinomio trigonometrico su [0 2π] con nodi equispaziati sia con Vandermonde sia con fft si devono utilizzare i primi n-1 nodi

```
>> format long e
```

```
>> ve=(cos(6.2)+1)./(sin(3.1)-2)
ve =
  -1.019466086105887e+000

>> vap=polyval(c,3.1)
vap =
-9.990653347193402e-001
>> ea=abs(ve-vap)
ea =
    2.040075138654685e-002
>> n=0;s=-1;while ea<.5*10^(s-n+1),n=n+1;end,n=n-1
n =
     1

>> vat=ct(4)+ct(3)*cos(3.1)+ct(2)*sin(3,1)+ct(1)*cos(6.2)
vat =
   -9.982710485116090e-001
>> ea=abs(ve-vat)
ea =
    2.119503759427810e-002
>> n=0;s=-1;while ea<.5*10^(s-n+1),n=n+1;end,n=n-1
n =
     1
```

****

```
>> f=inline('2*y.^2-y.^3','t','y');d=1e-3;ode113(f,[0 2/d],d);
>> [t,y]=ode113(f,[0 2/d],d);y(end),size(t)
ans =
        1.999374509398814e+000
ans =
        3775           1

>> ode15s(f,[0 2/d],d);
>> [t,y]=ode15s(f,[0 2/d],d);y(end),size(t)
ans =
         2
ans =
    76     1
```

E’ un problema stiff si ha maggiore efficienza in termini di tempo con ode15s

****

```
>> syms x real
>> format long e
>> ve=double(int((cos(2*x)+1)/(sin(x)-2),-pi,0))
ve =
-1.311173157422302e+000

>> x=linspace(-pi,0,11);y=(cos(2*x)+1)./(sin(x)-2);t1=trapz(x,y)
t1 =
   -1.319472973113581e+000

>> x=linspace(-pi,0,21);y=(cos(2*x)+1)./(sin(x)-2);t2=trapz(x,y)
t2 =
   -1.313233987243535e+000

>> x=linspace(-pi,0,41);y=(cos(2*x)+1)./(sin(x)-2);t3=trapz(x,y)
t3 =
```

```
   -1.311687490163401e+000

>> x=linspace(-pi,0,81);y=(cos(2*x)+1)./(sin(x)-2);t4=trapz(x,y)
t4 =
   -1.311301686065560e+000

>> format
>> e1=abs(ve-t1)
e1 =
    8.299815691279688e-003

>> e2=abs(ve-t2)
e2 =
   2.060829821233012e-003

>> e3=abs(ve-t3)
e3 =
  5.143327410990217e-004

>> e4=abs(ve-t4)
e4 =
  1.285286432579635e-004

>> [e1/e2 e2/e3 e3/e4]
ans =
    4.0274    4.0068    4.0017
```