

COGNOME NOME

MATRICOLA DOCENTI : COLOMBO – PAVANI

Tempo a disposizione: 3h.

1 Determinare, mediante la definizione la trasformata di Laplace della funzione $g(x) = 1$, con le proprietà della trasformata, calcolare la trasformata della funzione: $f(x) = \int_0^x x \sin x dx$.

2 Determinare la soluzione, per separazione delle variabili, del problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = x^3 - y, & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Verificare la compatibilità del problema. Esprimere i risultati in coordinate cartesiane.

3 Sia $u(x,t)$ soluzione continua del problema
$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \\ u(x,0) = 1 - \cos \pi x & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = te^{-\frac{t}{6}} & t \geq 0 \\ u(1,t) = 1 + e^{-6t} & t \geq 0 \end{cases}$$

- mostrare che $u(x,t)$ è non negativa;
- determinare una limitazione superiore per $u(x,t)$.

4 Determinare la soluzione del problema:
$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = e^{-t} & x \in R, t \in R^+ \\ u(x,0) = 0 & x \in R \\ u_t(x,0) = e^{2x} & x \in R \end{cases}$$

Verificare il risultato.

RIPORTARE I PRINCIPALI COMANDI DEL LISTATO MATLAB

1 Tracciare nell'intervallo $[-\pi \pi]$ il grafico della funzione $y = \frac{\sin 2x + 1}{\cos x - 2}$ suddividendo l'intervallo assegnato con 500 nodi. Verificato che la funzione ha due zeri nell'intervallo assegnato, è possibile determinare lo zero di minore ascissa con il metodo di bisezione? _____

Considerando il punto di ascissa -1 il valore della derivata prima della funzione nel punto è _____ (format short). Utilizzando il metodo di Newton con valore iniziale -1 , si ottiene come approssimazione dello zero di minore ascissa il valore (output in format long e) _____ in _____ iterazioni. Commentare i risultati.

2 Considerata la funzione $y = \frac{\cos 2x + 1}{\sin x - 2}$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$, suddividere l'intervallo in cinque nodi equispaziati, l'equazione del polinomio algebrico interpolante la funzione nei nodi determinati è (format short) _____ .
 L'equazione del polinomio trigonometrico interpolante la funzione nei nodi determinati è (format short) _____ .
 Considerare ora l'output in format long e .
 Il valore assunto dalla funzione nel punto di ascissa 3.1 è _____ .
 L'approssimazione in 3.1 con il polinomio algebrico è _____ .
 L'errore commesso è _____ ; il numero di cifre esatte è ____ .
 L'approssimazione in 3.1 con il polinomio trigonometrico è _____ .
 L'errore commesso è _____ ; il numero di cifre esatte è ____ .

3 Assegnato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2y^2 - y^3 \\ y(0) = 0.001 \end{cases}$ un'approssimazione della soluzione nel tempo

$t = 2000$:
 con la function Matlab® ode113 è: _____ .
 con la function Matlab® ode15s è: _____ .
 Commentare i risultati in termini di efficienza del metodo utilizzato:

4 Utilizzando il metodo dei trapezi generalizzato determinare un'approssimazione di $\int_0^\pi \frac{\cos 2x + 1}{\sin x - 2} dx$ suddividendo l'intervallo di integrazione in $n = 10, 20, 40, 80$ sottointervalli equispaziati. Output in format long e .

$n = 10$ appr. = _____ ; $n = 20$ appr. = _____ ;

$n = 40$ appr. = _____ ; $n = 80$ appr. = _____ ;

Il valore esatto dell'integrale è: _____ .

Gli errori commessi sono rispettivamente:

$n = 10$ err1. = _____ ; $n = 20$ err2. = _____ ;

$n = 40$ err3. = _____ ; $n = 80$ err4. = _____ ;

I rapporti [err1/err2 err2/err3 err3/err4] sono (output in format short):

_____ ; _____ ; _____ ; commentare i risultati

SOLUZIONI

Per la proprietà della trasformata di Laplace,

$$e^{bx} f(x) \rightarrow F(s-b), xf(x) \rightarrow -\frac{dF(s)}{ds}, \int_0^x f(t) dt \rightarrow \frac{F(s)}{s}$$

$$\text{se } g(x)=1, G(s)=\int_0^{+\infty} e^{-sx} ds = -\frac{1}{s} e^{-sx} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s},$$

$$\text{poiché } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \sin x \rightarrow \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i} \right) = \frac{1}{2i} \frac{2i}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1},$$

$$x \sin x \rightarrow -\frac{d\left(\frac{1}{s^2+1}\right)}{ds} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}, \int_0^x t \sin t dt \rightarrow \frac{2}{(s^2+1)^2}$$

$$f(\vartheta) = \cos^3 \vartheta - \sin \vartheta = \cos \vartheta \cos^2 \vartheta - \sin \vartheta = \cos \vartheta \frac{1+\cos 2\vartheta}{2} - \sin \vartheta = \frac{1}{2} \cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos \vartheta \cos 2\vartheta - \sin \vartheta =$$

$$\frac{1}{2} \cos \vartheta + \frac{1}{4} \cos 3\vartheta + \frac{1}{4} \cos \vartheta - \sin \vartheta = \frac{1}{4} \cos 3\vartheta + \frac{3}{4} \cos \vartheta - \sin \vartheta$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} \cos 3\vartheta + \frac{3}{4} \cos \vartheta - \sin \vartheta \right) d\vartheta = \frac{1}{12} \sin 3\vartheta + \frac{3}{4} \sin \vartheta + \cos \vartheta \Big|_0^{2\pi} = 1 - 1 = 0$$

$$\text{da } \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{+\infty} nd_n \sin n\theta = \frac{1}{4} \cos 3\vartheta + \frac{3}{4} \cos \vartheta - \sin \vartheta \Rightarrow c_1 = \frac{3}{4}, c_3 = \frac{1}{12}, d_1 = -1 \Rightarrow$$

$$u(\rho, \vartheta) = k + \frac{1}{12} \rho^3 \cos 3\vartheta + \frac{3}{4} \rho \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta$$

$$k + \frac{1}{12} \rho^3 \cos(\vartheta + 2\vartheta) + \frac{3}{4} \rho \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta = k + \frac{1}{12} \rho^3 \cos \vartheta \cos 2\vartheta - \frac{1}{12} \rho^3 \sin \vartheta \sin 2\vartheta + \frac{3}{4} \rho \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta =$$

$$k + \frac{1}{12} \rho^3 \cos^3 \vartheta - \frac{1}{4} \rho^3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta + \frac{3}{4} \rho \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \Rightarrow k + \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{4} xy^2 + \frac{3}{4} x - y = u(x, y)$$

$$u_x(x, y) = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \frac{3}{4}, u_y(x, y) = -\frac{1}{2} xy - 1 \Rightarrow \frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{4} xy^2 + \frac{3}{4} x - \frac{1}{2} xy^2 - y = \frac{1}{4} x^3 - \frac{3}{4} xy^2 + \frac{3}{4} x - y =$$

$$\frac{1}{4} x^3 - \frac{3}{4} x(1-x^2) + \frac{3}{4} x - y = x^3 - y$$

$$\text{Posto } I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}, u(x, 0) = 1 - \cos \pi x \geq 0 \Rightarrow \forall x \in I, u(0, t) = te^{-\frac{t}{6}} \geq 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(1, t) = 1 + e^{-6t} \geq 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+; \text{ la soluzione } u(x, t) \text{ è sempre non negativa.}$$

$$u(x, 0) = 1 - \cos \pi x \Rightarrow 0 \leq u(x, 0) \leq 2$$

$$u(0, t) = te^{-\frac{t}{6}} \Rightarrow u_t(0, t) = \left(1 - \frac{t}{6}\right) e^{-\frac{t}{6}} \geq 0 \Rightarrow t \leq 6 \Rightarrow 0 \leq u(0, t) \leq \frac{6}{e} \sim 2.207$$

$$u(1, t) = 1 + e^{-6t} \Rightarrow u_t(1, t) = -6e^{-6t} \geq 0 \Rightarrow \emptyset \Rightarrow 1 < u(1, t) \leq 2$$

la funzione è limitata da 2.207.

La soluzione è $u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} e^{2y} dy + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-s}^{x+s} e^{s-t} dy ds = \frac{1}{4} e^{2x+2t} - \frac{1}{4} e^{2x-2t} + e^{-t} \int_0^t s e^s ds =$
 $\frac{1}{4} e^{2x+2t} - \frac{1}{4} e^{2x-2t} + e^{-t} (te^t - e^t + 1) = \frac{1}{4} e^{2x+2t} - \frac{1}{4} e^{2x-2t} + e^{-t} + t - 1$

VERIFICA

$$u(x,0) = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + 1 - 1 = 0;$$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2} e^{2x+2t} + \frac{1}{2} e^{2x-2t} - e^{-t} + 1, \quad u_t(x,0) = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} - 1 + 1 = e^{2x}; \quad u_{tt}(x,t) = e^{2x+2t} - e^{2x-2t} + e^{-t}$$

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2} e^{2x+2t} - \frac{1}{2} e^{2x-2t}; \quad u_{xx}(x,t) = e^{2x+2t} - e^{2x-2t};$$

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = e^{2x+2t} - e^{2x-2t} + e^{-t} - e^{2x+2t} + e^{2x-2t} = e^{-t}$$

```
>> x=linspace(-pi,pi,500);y=(sin(2*x)+1)./(cos(x)-2);plot(x,y)
>> syms x real
>> f=(sin(2*x)+1)./(cos(x)-2)
f =
(sin(2*x)+1)/(cos(x)-2)

>> f1=diff(f)
f1 =
2*cos(2*x)/(cos(x)-2)+(sin(2*x)+1)/(cos(x)-2)^2*sin(x)

>> x=-1;eval(f1)
ans =
5.343616165100964e-001

>> x0=-0.5;n=0;while abs(x-x0)>1e-6,n=n+1;x0=x;x=x-
eval(f)/eval(f1);end,x,n
x =
-7.853988697601192e-001
n =
18
```

```
>> a=linspace(0,2*pi,5);o=(cos(2*a)+1)./(sin(a)-2);
>> c=polyfit(a,o,4),
c =
-0.0548    0.6880   -2.7019    3.3953   -1.0000

>> a=a(1:end-1);o=o(1:end-1);
>> m=[cos(2*a') sin(a') cos(a') ones(4,1)];cond(m),ct=m\o'
ans =
1.4142
ct =
-0.5000
-0.0000
0.0000
-0.5000
```

come affermato più volte a lezione nel caso di polinomio trigonometrico su $[0, 2\pi]$ con nodi equispaziati sia con Vandermonde sia con fft si devono utilizzare i primi $n-1$ nodi

```
>> format long e
```

```

>> ve=(cos(6.2)+1)./(sin(3.1)-2)
ve =
    -1.019466086105887e+000

>> vap=polyval(c,3.1)
vap =
   -9.990653347193402e-001
>> ea=abs(ve-vap)
ea =
    2.040075138654685e-002
>> n=0;s=-1;while ea<.5*10^(s-n+1),n=n+1;end,n=n-1
n =
     1

>> vat=ct(4)+ct(3)*cos(3.1)+ct(2)*sin(3,1)+ct(1)*cos(6.2)
vat =
   -9.982710485116090e-001
>> ea=abs(ve-vat)
ea =
    2.119503759427810e-002
>> n=0;s=-1;while ea<.5*10^(s-n+1),n=n+1;end,n=n-1
n =
     1

```

```

>> f=inline('2*y.^2-y.^3','t','y');d=1e-3;ode113(f,[0 2/d],d);
>> [t,y]=ode113(f,[0 2/d],d);y(end),size(t)
ans =
    1.999374509398814e+000
ans =
    3775         1

>> ode15s(f,[0 2/d],d);
>> [t,y]=ode15s(f,[0 2/d],d);y(end),size(t)
ans =
         2
ans =
    76         1

```

E' un problema stiff si ha maggiore efficienza in termini di tempo con ode15s

```

>> syms x real
>> format long e
>> ve=double(int((cos(2*x)+1)/(sin(x)-2),-pi,0))
ve =
   -1.311173157422302e+000

>> x=linspace(-pi,0,11);y=(cos(2*x)+1)./(sin(x)-2);t1=trapz(x,y)
t1 =
   -1.319472973113581e+000

>> x=linspace(-pi,0,21);y=(cos(2*x)+1)./(sin(x)-2);t2=trapz(x,y)
t2 =
   -1.313233987243535e+000

>> x=linspace(-pi,0,41);y=(cos(2*x)+1)./(sin(x)-2);t3=trapz(x,y)
t3 =

```

```
-1.311687490163401e+000
```

```
>> x=linspace(-pi,0,81);y=(cos(2*x)+1)./(sin(x)-2);t4=trapz(x,y)
t4 =
-1.311301686065560e+000
```

```
>> format
>> e1=abs(ve-t1)
e1 =
8.299815691279688e-003
```

```
>> e2=abs(ve-t2)
e2 =
2.060829821233012e-003
```

```
>> e3=abs(ve-t3)
e3 =
5.143327410990217e-004
```

```
>> e4=abs(ve-t4)
e4 =
1.285286432579635e-004
```

```
>> [e1/e2 e2/e3 e3/e4]
ans =
4.0274    4.0068    4.0017
```