Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Politecnico di Milano - Ingegneria Energetica	**Metodi Analitici e Numerici**	**4 Settembre 2017**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Utilizzndo il metodo di separazione delle variabili, determinare una soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + u(x,t) = 0 & \text{in} \quad Q = (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 1 + \cos(3x) & \text{in} \quad (0,\pi), \\ \dfrac{\partial}{\partial x}u(0,t) = \dfrac{\partial}{\partial x}u(\pi,t) = 0, & \text{in} \quad (0,+\infty). \end{cases}$$

Soluzioni

Utilizziamo la separazione di variabili. Cerchiamo una soluzione del problema della forma

$$u(x,t) = \alpha(t)\beta(x), \quad \text{ove} \quad \alpha \in C^2([0,+\infty)) \quad \text{e} \quad \beta \in C^2([0,\pi]), \quad \text{con} \quad \alpha, \beta \neq 0.$$

Derivando tale funzione e sostituendola nell'equazione, si vede che α e β soddisfano le identità

$$\frac{\alpha''(t) + \alpha(t)}{\alpha(t)} = \frac{\beta''(x)}{\beta(x)} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ (incognita da determinare).}$$

Considerando l'equazione per β, si deduce che essa risolve il problema ai limiti

$$\begin{cases} \beta''(x) - \lambda\beta(x) = 0, \quad x \in (0,\pi), \\ \beta'(0) = \beta'(\pi) = 0 \end{cases}$$

il quale ammette soluzioni non banali se, e solo se $\lambda = \lambda_n = -n^2 \leq 0$ e in questi casi

$$\beta(x) = \beta_n(x) = c_n \cos(nx), \quad x \in (0,\pi) \quad (c_n \text{ costanti incognite da determinare}).$$

Si noti che la soluzione $\beta_0(x) = c_0$, corrispondente all'autovalore $\lambda_n = 0$ è costante. Per quanto riguarda α, essa risolve il problema

$$\begin{cases} \alpha''(t) + (1+n^2)\,\alpha(t) = 0, \quad t \in (0,+\infty), \\ \alpha(0) = 0 \end{cases}$$

che ammette come soluzioni

$$\alpha(t) = \alpha_n(t) = d_n \sin\left(t\sqrt{n^2+1}\right), n \geq 0, \quad t \in (0,+\infty) \quad (d_n \text{ costanti incognite da determinare}).$$

Quindi, una generica soluzione del problema ha la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \sin\left(t\sqrt{n^2+1}\right)\cos(nx), \quad (x,t) \in Q,$$

ove abbiamo posto $B_n = c_n d_n$. Notiamo subito che

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \sqrt{n^2+1} \cos\left(t\sqrt{n^2+1}\right) \cos(nx),$$

da cui, utilizzando la condizione iniziale su $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)$ (finora non considerata) deduciamo

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \sqrt{n^2+1} \cos(nx) = 1 + \cos(3x).$$

Quindi, per il principio di identità delle serie di Fourier (oppure, analogmente, utilizzando il teorema di ortogonalità), abbiamo subito che

$$B_0 = 1, \quad \sqrt{10} B_3 = 1 \quad \text{e} \quad B_n = 0 \quad \forall\, n \neq 0, 3.$$

Concludiamo quindi che

$$u(x,t) = \sin t + \frac{1}{\sqrt{10}} \sin\left(t\sqrt{10}\right) \cos(3x), \quad (x,t) \in Q.$$

Esercizio 2.

Determinare una soluzione $u = u(x,t)$ del problema di Chauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Soluzioni

Posto $K_t(x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ (*nucleo del calore*) e $\phi(x) = e^{-x^2}$ (*dato iniziale*), utilizzando la formula fondamentale abbiamo quindi che

$$u(x,t) = (K_t * \phi)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} K_t(y)\phi(x-y)dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t} - y^2 + 2xy} dy.$$

Per calcolare esplicitamente gli integrali alle riga sopra, ricordiamo preliminarmentel'integrale gaussiano

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Dalla semplice eguaglianza

$$\left(\frac{1}{4t} + 1\right) y^2 - 2xy = \left(y\sqrt{\frac{1}{4t} + 1} - \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{4t} + 1}} \right)^2 - \frac{x^2}{\frac{1}{4t} + 1}$$

Deduciamo quindi che

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t} - y^2 + 2xy} dy &= e^{\frac{x^2}{\frac{1}{4t}+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y\sqrt{\frac{1}{4t}+1} - \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{4t}+1}} \right)^2} dy \\ &= \left[\text{poniamo } z = y\sqrt{\frac{1}{4t} + 1} - \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{4t} + 1}} \iff dy = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4t} + 1}} dz \right] \\ &= \frac{e^{\frac{x^2}{\frac{1}{4t}+1}}}{\sqrt{\frac{1}{4t} + 1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{4\pi t}}{\sqrt{4t+1}} e^{\frac{4t}{4t+1}x^2}. \end{aligned}$$

Tornando alla formula generale, si ha dunque

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \frac{\sqrt{4\pi t}}{\sqrt{4t+1}} e^{\left(-1 + \frac{4t}{4t+1}x^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Esercizio 3.

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{x^2+9}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzioni

Notiamo preliminarmente che valggono le seguenti eguaglianze

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right),$$

Pertanto consideriamo la decomposizione

$$f(x) = \frac{1}{2} f_1(x) + \frac{1}{4} f_2(x) + \frac{1}{4} f_2(x)$$

ove abbiamo definito

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2+9}, \quad f_2(x) = \frac{e^{2ix}}{x^2+9} \quad \text{e} \quad f_2(x) = \frac{e^{-2ix}}{x^2+9}.$$

Procediamo quindi al calcolo delle trasformate di f_1, f_2 e f_3. Per quanto riguarda f_1, abbiamo

$$\mathcal{F}[f_1](y) = \frac{\pi}{3} e^{-3|y|} \quad \text{(trasformata notevole).}$$

Prendendo poi in considerazione la formula di traslazione

$$\mathcal{F}[e^{iax}\phi(x)](y) = \mathcal{F}[\phi](y-a), \quad (a \text{ costante reale})$$

possiamo calcolare anche

$$\mathcal{F}[f_2](y) = \mathcal{F}[e^{2ix} f_1(x)](y) = \mathcal{F}[f_1](y-2) = \frac{\pi}{3} e^{-3|y-2|}$$

e, analogamente

$$\mathcal{F}[f_3](y) = \mathcal{F}[e^{-2ix} f_1(x)](y) = \mathcal{F}[f_1](y+2) = \frac{\pi}{3} e^{-3|y+2|}.$$

Infine, per linearità, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](y) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}[f_1](y) + \frac{1}{4}\mathcal{F}[f_2](y) + \frac{1}{4}\mathcal{F}[f_3](y) \\ &= \frac{\pi}{6} e^{-3|y|} + \frac{\pi}{12} e^{-3|y-2|} + \frac{\pi}{12} e^{-3|y+2|}, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.

Utilizzando la trasformata di Laplace, determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -3e^t, \quad t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Soluzioni

Definiamo preliminarmente la notazione standard

$$\mathcal{L}[y](s) = \overline{y}(s), \quad s \in (0, +\infty) \quad (\textit{Trasformata di Laplace}).$$

Applichiamo quindi la trasformata di Laplace al termine di sinistra dell'equazione e imponiamo le condizioni iniziali. Si ha

$$s^2\overline{y}(s) - sy(0) - y'(0) + s\overline{y}(s) - y(0) - 2\overline{y}(s) = \left(s^2 + s - 2\right)\overline{y}(s) - 2s = (s-1)(s+2)\overline{y}(s) - 2s.$$

Ricordando inoltre che

$$\mathcal{L}[-3e^t](s) = -\frac{3}{s-1} \quad s \in (1, +\infty),$$

concludiamo

$$\overline{y}(s) = \frac{2s}{(s-1)(s+2)} - \frac{3}{(s-1)^2(s+2)}.$$

In virtù della decomposizione

$$\frac{2s}{(s-1)(s+2)} - \frac{3}{(s-1)^2(s+2)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

deduciamo infine che

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\overline{y}](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right](t) \\ &= e^t + e^{-2t} - te^t. \end{aligned}$$