Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Politecnico di Milano - Ingegneria Energetica	**Metodi Analitici e Numerici (A)**	**14 Luglio 2017**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Sia $u = u(x,t)$ la soluzione continua del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 0, & \text{in} \quad (0,1) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = 2te^{-\frac{1}{2}t}, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(1,t) = \dfrac{1}{2}te^{-2t} + 1, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(x,0) = 3x^2 - 2x^3, & \text{in} \quad (0,1). \end{cases}$$

a. Mostrare che $u(x,t)$ è non negativa;

b. determinare una limitazione superiore per $u(x,t)$.

Esercizio 2.

Si consideri il problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \\ \partial_x u(0,y) = 0, \quad \partial_x u(1,y) = 0, & y \in (0,1), \\ \partial_y u(x,0) = 0, \quad \partial_y u(x,1) = 1 - 2\cos^2(2\pi x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

a. Verificare la compatibilità delle condizioni al bordo;

b. specificare se la soluzione di tale problema è unica;

c. determinare una formula di rappresentazione per $u(x,y)$.
[*Suggerimento*: può essere utile ricordare l'identità trigonometrica $\cos^2\vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\vartheta)$]

Esercizio 3.

Determinare la soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 3t^2 - 2xt + e^{-t}, & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Esercizio 4.

Determinare la antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - s + 1}{s^4 - 1}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Politecnico di Milano - Ingegneria Energetica	Metodi Analitici e Numerici (B)	14 Luglio 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Sia $u = u(x,t)$ la soluzione continua del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 0, & \text{in} \quad (0,1) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = 2te^{-\frac{1}{2}t}, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(1,t) = \dfrac{1}{2}te^{-2t} + 1, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(x,0) = 4x^3 - 3x^4, & \text{in} \quad (0,1). \end{cases}$$

a. Mostrare che $u(x,t)$ è non negativa;

b. determinare una limitazione superiore per $u(x,t)$.

Esercizio 2.

Si consideri il problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & & (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ \partial_x u(0,y) = 0, & \partial_x u(1,y) = 2\cos^2(2\pi y) - 1, & y \in (0,1), \\ \partial_y u(x,0) = 0, & \partial_y u(x,1) = 0, & x \in (0,1). \end{cases}$$

a. Verificare la compatibilità delle condizioni al bordo;

b. specificare se la soluzione di tale problema è unica;

c. determinare una formula di rappresentazione per $u(x,y)$.
[*Suggerimento*: può essere utile ricordare l'identità trignometrica $\cos^2 \vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\vartheta)$]

Esercizio 3.

Determinare la soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 2xt - 3t^2 - e^{-t}, & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Esercizio 4.

Determinare la antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{s^2+3}{1-s^4}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Politecnico di Milano - Ingegneria Energetica	**Metodi Analitici e Numerici (A)**	**14 Luglio 2017**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Sia $u = u(x,t)$ la soluzione continua del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 0, & \text{in} \quad (0,1) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = 2te^{-\frac{1}{2}t}, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(1,t) = \dfrac{1}{2}te^{-2t} + 1, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(x,0) = 3x^2 - 2x^3, & \text{in} \quad (0,1). \end{cases}$$

a. Mostrare che $u(x,t)$ è non negativa;

b. determinare una limitazione superiore per $u(x,t)$.

Esercizio 2.

Si consideri il problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & & (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ \partial_x u(0,y) = 0, & \partial_x u(1,y) = 0, & y \in (0,1), \\ \partial_y u(x,0) = 0, & \partial_y u(x,1) = 1 - 2\cos^2(2\pi x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

a. Verificare la compatibilità delle condizioni al bordo;

b. specificare se la soluzione di tale problema è unica;

c. determinare una formula di rappresentazione per $u(x,y)$.
[*Suggerimento*: può essere utile ricordare l'identità trignometrica $\cos^2\vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\vartheta)$]

Esercizio 3.

Determinare la soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 3t^2 - 2xt + e^{-t}, & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Esercizio 4.

Determinare la antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - s + 1}{s^4 - 1}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Politecnico di Milano - Ingegneria Energetica	**Metodi Analitici e Numerici (B)**	**14 Luglio 2017**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Sia $u = u(x,t)$ la soluzione continua del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 0, & \text{in} \quad (0,1) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = 2te^{-\frac{1}{2}t}, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(1,t) = \dfrac{1}{2}te^{-2t} + 1, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(x,0) = 4x^3 - 3x^4, & \text{in} \quad (0,1). \end{cases}$$

a. Mostrare che $u(x,t)$ è non negativa;

b. determinare una limitazione superiore per $u(x,t)$.

Esercizio 2.

Si consideri il problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & & (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ \partial_x u(0,y) = 0, & \partial_x u(1,y) = 2\cos^2(2\pi y) - 1, & y \in (0,1), \\ \partial_y u(x,0) = 0, & \partial_y u(x,1) = 0, & x \in (0,1). \end{cases}$$

a. Verificare la compatibilità delle condizioni al bordo;

b. specificare se la soluzione di tale problema è unica;

c. determinare una formula di rappresentazione per $u(x,y)$.
[*Suggerimento*: può essere utile ricordare l'identità trignometrica $\cos^2\vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\vartheta)$]

Esercizio 3.

Determinare la soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 2xt - 3t^2 - e^{-t}, & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Esercizio 4.

Determinare la antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{s^2 + 3}{1 - s^4}.$$