Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Politecnico di Milano - Ingegneria Energetica	Metodi Analitici e Numerici (A)	14 Luglio 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Sia $u = u(x,t)$ la soluzione continua del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 0, & \text{in} \quad (0,1)\times(0,+\infty), \\ u(0,t) = 2te^{-\frac{1}{2}t}, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(1,t) = \dfrac{1}{2}te^{-2t} + 1, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(x,0) = 3x^2 - 2x^3, & \text{in} \quad (0,1). \end{cases}$$

a. Mostrare che $u(x,t)$ è non negativa;

b. determinare una limitazione superiore per $u(x,t)$.

Soluzioni

Notiamo preliminarmente che tale soluzione continua esiste, in quanto le condizioni iniziali ed al bordo sono tra di loro compatibili.

a. In virtù del principio del massimo (minimo), è sufficiente mostrare che u è non negativa sulla frontiera parabolica

$$\partial Q = \{(0,t) : t \geq 0\} \cup \{(1,t) : t \geq 0\} \cup \{(x,0) : x \in [0,1]\}.$$

Questo è immediato in quanto

$$u(0,t) = 2te^{-\frac{1}{2}t} \geq 0, \quad u(1,t) = \frac{1}{2}te^{-2t} + 1 \geq 0 \quad \text{e} \quad u(x,0) = 3x^2 - 2x^3 \geq 0.$$

b. Utilizzando ancora il principio del massimo, abbiamo che

$$\max_{x\in[0,1], t\geq 0} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\partial Q} u(x,t).$$

Dalle semplici limitazioni

$$u(0,t) \leq u(0,2) = 4e^{-1}, \quad u(1,t) \leq u\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{-1} + 1 \quad \text{e} \quad u(x,0) \geq u(1,x) = 1,$$

si deduce

$$u(x,t) \leq \max\left\{4e^{-1}, \frac{1}{4}e^{-1} + 1, 1\right\} = 4e^{-1}, \quad \forall\, x \in [0,1], \forall\, t \geq 0.$$

Esercizio 2.

Si consideri il problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ \partial_x u(0,y) = 0, \quad \partial_x u(1,y) = 0, & y \in (0,1), \\ \partial_y u(x,0) = 0, \quad \partial_y u(x,1) = 1 - 2\cos^2(2\pi x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

a. Verificare la compatibilità delle condizioni al bordo;

b. specificare se la soluzione di tale problema è unica;

c. determinare una formula di rappresentazione per $u(x,y)$.
[*Suggerimento*: può essere utile ricordare l'identità trigonometrica $\cos^2\vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\vartheta)$]

Soluzioni

a. Per verificare la compatibilità delle condizioni al bordo è necessario dimostrare la seguente uguaglianza

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\boldsymbol{n}} u \, d\sigma = \int_0^1 \partial_x u(0,y)dy + \int_0^1 \partial_x u(1,y)dy + \int_0^1 \partial_y u(x,0)dx + \int_0^1 \partial_y u(x,1)dx = 0.$$

Poichè i primi tre addendi sono nulli, dovremo verificare che anche l'ultimo integrale vale zero. Utilizzando la relazione (vedi suggerimento)

$$\cos^2(2\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi x)$$

è immediato verificare che

$$\int_0^1 \partial_y u(x,1)dx = \int_0^1 \left[1 - 2\cos^2(2\pi x)\right] dx = -\int_0^1 \cos(4\pi x)dx = 0.$$

b. La soluzione del problema proposto non è unica. Se infatti $u(x,y)$ risolve il problema, allora anche $u(x,y) + c$ è soluzione, per ogni valore della costante additiva $c \in \mathbb{R}$.

c. Utilizziamo la separazione di variabili. Cerchiamo una soluzione del problema della forma

$$u(x,y) = \alpha(x)\beta(y), \quad \text{con} \quad 0 \neq \alpha, \beta \in C^2([0,1]).$$

Derivando tale funzione, grazie all'equazione di Laplace si vede che α e β soddisfano le identità

$$-\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} = \frac{\beta''(y)}{\beta(y)} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ (incognita da determinare)}.$$

Considerando l'equazione per α, si deduce che essa risolve il problema ai limiti

$$\begin{cases} \alpha''(x) + \lambda\alpha(x) = 0, \quad x \in (0,1), \\ \alpha'(0) = \alpha'(1) = 0 \end{cases}$$

il quale ammette soluzioni non banali se, e solo se $\lambda = \lambda_n = \pi^2 n^2 \geq 0$ e in questi casi

$$\alpha(x) = \alpha_n(x) = c_n \cos(\pi n x), \quad x \in (0,1) \quad (c_n \text{ costante incognita da determinare}).$$

Si noti che la soluzione $\alpha_0(x) = c_0$, corrispondente all'autovalore $\lambda_0 = 0$ è costante. Per quanto riguarda β, essa risolve il problema

$$\begin{cases} \beta''(y) - \pi^2 n^2 \beta(y) = 0, \quad y \in (0,1), \\ \beta'(0) = 0, \end{cases}$$

che ammette come soluzioni

$$\beta(y) = \beta_n(y) = d_n \operatorname{Ch}(\pi n y), \quad y \in (0,1) \quad (d_n \text{ costante incognita da determinare}).$$

Quindi, una generica soluzione del problema ha la forma

$$u(x,y) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(\pi n x) \operatorname{Ch}(\pi n y), \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1).$$

Per determinare la costanti incognite $C_n = c_n d_n$ $(n \geq 1)$, utilizziamo la condizione su $\partial_y u(x,1)$ (finora non considerata), per dedurre l'identità

$$\partial_y u(1,y) = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} n C_n \cos(\pi n x) \operatorname{Sh}(\pi n) = 1 - 2\cos^2(2\pi x).$$

Utilizzando ancora la relazione trigonometrica

$$\cos^2(2\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi x)$$

ed il teorema di ortogonalità

$$\int_0^1 \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)dx = \begin{cases} -1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

abbiamo quindi che

$$\pi n C_n \operatorname{Sh}(\pi n) = \begin{cases} -1, & n = 4, \\ 0, & n \geq 1, n \neq 4, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad C_4 = -\frac{1}{4\pi \operatorname{Sh}(4\pi)} \quad \text{e} \quad C_n = 0 \quad \forall n \geq 1, n \neq 4.$$

La soluzione del problema proposto sarà infine

$$u(x,y) = C_0 - \frac{\cos(4\pi x)\operatorname{Ch}(4\pi y)}{4\pi \operatorname{Sh}(4\pi)}, \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1).$$

Si noti che tale soluzione dipende dalla costante additiva C_0 (cf. punto **b**).

Esercizio 3.

Determinare la soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 3t^2 - 2xt + e^{-t}, & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Soluzioni

Utilizziamo la formula risolutiva

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} \left(3\tau^2 - 2y\tau + e^{-\tau}\right) dy d\tau.$$

Ricordando l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4\tau}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} dy = \sqrt{4\pi\tau},$$

abbiamo

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} \left(3\tau^2 + e^{-\tau}\right) dy d\tau = \int_0^t \left(3\tau^2 + e^{-\tau}\right) d\tau = t^3 + 1 - e^{-t}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} dy d\tau &= \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-y) e^{-\frac{y^2}{4\tau}} dy d\tau \\ &= x \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4\tau}} dy d\tau - \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{4\tau}} dy d\tau \\ &= x \int_0^t \tau d\tau - \int_0^t \frac{\tau(-2\tau)}{\sqrt{4\pi\tau}} \left[e^{-\frac{y^2}{4\tau}}\right]_{-\infty}^{+\infty} d\tau = \frac{1}{2} x t^2. \end{aligned}$$

Quindi, la soluzione u del problema proposto è

$$u(x,t) = t^3 + 1 - e^{-t} - xt^2.$$

Esercizio 4.

Determinare la antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - s + 1}{s^4 - 1}.$$

Soluzioni

In virtù della decomposizione

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} + \frac{s}{s^2+1},$$

e ricordando le antitrasformate delle funzioni elementari, abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right](t) \\ &= e^t - e^{-t} + \cos t.\end{aligned}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Politecnico di Milano - Ingegneria Energetica	Metodi Analitici e Numerici (B)	14 Luglio 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Sia $u = u(x,t)$ la soluzione continua del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 0, & \text{in} \quad (0,1) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = 2te^{-\frac{1}{2}t}, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(1,t) = \dfrac{1}{2}te^{-2t} + 1, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(x,0) = 4x^3 - 3x^4, & \text{in} \quad (0,1). \end{cases}$$

a. Mostrare che $u(x,t)$ è non negativa;

b. determinare una limitazione superiore per $u(x,t)$.

Soluzioni

Notiamo preliminarmente che tale soluzione continua esiste, in quanto le condizioni iniziali ed al bordo sono tra di loro compatibili.

a. In virtù del principio del massimo (minimo), è sufficiente mostrare che u è non negativa sulla frontiera parabolica

$$\partial Q = \{(0,t) : t \geq 0\} \cup \{(1,t) : t \geq 0\} \cup \{(x,0) : x \in [0,1]\}.$$

Questo è immediato in quanto

$$u(0,t) = 2te^{-\frac{1}{2}t} \geq 0, \quad u(1,t) = \frac{1}{2}te^{-2t} + 1 \geq 0 \quad \text{e} \quad u(x,0) = 4x^3 - 3x^4 \geq 0.$$

b. Utilizzando ancora il principio del massimo, abbiamo che

$$\max_{x \in [0,1], t \geq 0} u(x,t) = \max_{(x,t) \in \partial Q} u(x,t).$$

Dalle semplici limitazioni

$$u(0,t) \leq u(0,2) = 4e^{-1}, \quad u(1,t) \leq u\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{-1} + 1 \quad \text{e} \quad u(x,0) \geq u(1,x) = 1,$$

si deduce

$$u(x,t) \leq \max\left\{4e^{-1}, \frac{1}{4}e^{-1} + 1, 1\right\} = 4e^{-1}, \quad \forall\, x \in [0,1], \forall\, t \geq 0.$$

Esercizio 2.

Si consideri il problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \\ \partial_x u(0,y) = 0, \quad \partial_x u(1,y) = 2\cos^2(2\pi y) - 1, & y \in (0,1), \\ \partial_y u(x,0) = 0, \quad \partial_y u(x,1) = 0, & x \in (0,1). \end{cases}$$

a. Verificare la compatibilità delle condizioni al bordo;

b. specificare se la soluzione di tale problema è unica;

c. determinare una formula di rappresentazione per $u(x,y)$.
[*Suggerimento*: può essere utile ricordare l'identità trignometrica $\cos^2\vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\vartheta)$]

Soluzioni

a. Per verificare la compatibilità delle condizioni al bordo è necessario dimostrare la seguente uguaglianza

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\boldsymbol{n}} u \, d\sigma = \int_0^1 \partial_x u(1,y)dy + \int_0^1 \partial_x u(0,y)dy + \int_0^1 \partial_y u(x,0)dx + \int_0^1 \partial_y u(x,1)dx = 0.$$

Poichè gli ultimi tre addendi sono nulli, dovremo verificare che anche il primo integrale vale zero. Utilizzando la relazione (vedi suggerimento)

$$\cos^2(2\pi y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi y)$$

è immediato verificare che

$$\int_0^1 \partial_x u(1,y)dy = \int_0^1 \left[2\cos^2(2\pi y) - 1\right] dy = \int_0^1 \cos(4\pi y)dy = 0.$$

b. La soluzione del problema proposto non è unica. Se infatti $u(x,y)$ risolve il problema, allora anche $u(x,y) + c$ è soluzione, per ogni valore della costante additiva $c \in \mathbb{R}$.

c. Utilizziamo la separazione di variabili. Cerchiamo una soluzione del problema della forma

$$u(x,y) = \alpha(x)\beta(y), \quad \text{con} \quad 0 \neq \alpha, \beta \in C^2([0,1]).$$

Derivando tale funzione, grazie all'equazione di Laplace si vede che α e β soddisfano le identità

$$-\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} = \frac{\beta''(y)}{\beta(y)} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ (incognita da determinare)}.$$

Considerando l'equazione per β, si deduce che essa risolve il problema ai limiti

$$\begin{cases} \beta''(y) + \lambda\beta(y) = 0, \quad y \in (0,1), \\ \beta'(0) = \beta'(1) = 0 \end{cases}$$

il quale ammette soluzioni non banali se, e solo se $\lambda = \lambda_n = \pi^2 n^2 \geq 0$ e in questi casi

$$\beta(y) = \beta_n(y) = c_n \cos(\pi n y), \quad y \in (0,1), \quad (c_n \text{ costante incognita da determinare})$$

Si noti che la soluzione $\alpha_0(x) = c_0$, corrispondente all'autovalore $\lambda_0 = 0$ è costante. Per quanto riguarda β, essa risolve il problema

$$\begin{cases} \alpha''(x) - \pi^2 n^2 \, \alpha(x) = 0, \quad x \in (0,1), \\ \alpha'(0) = 0, \end{cases}$$

che ammette come soluzioni

$$\alpha(x) = \alpha_n(x) = d_n \, \mathrm{Ch}(\pi n x), \quad x \in (0,1) \quad (d_n \text{ costante incognita da determinare}).$$

Quindi, una generica soluzione del problema ha la forma

$$u(x,y) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \mathrm{Ch}(\pi n x) \cos(\pi n y), \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1).$$

Per determinare la costanti incognite $C_n = c_n d_n$ $(n \geq 1)$, utilizziamo la condizione su $\partial_x u(1,y)$ (finora non considerata), per dedurre l'identità

$$\partial_x u(1,y) = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} n C_n \mathrm{Sh}(\pi n) \cos(\pi n y) = 2\cos^2(2\pi x) - 1.$$

Utilizzando ancora la relazione trigonometrica

$$\cos^2(2\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi x)$$

ed il teorema di ortogonalità

$$\int_0^1 \cos(n\pi y)\cos(m\pi y) dy = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

abbiamo quindi che

$$\pi n C_n \mathrm{Sh}(\pi n) = \begin{cases} 1, & n = 4, \\ 0, & n \geq 1, n \neq 4, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad C_4 = \frac{1}{4\pi \mathrm{Sh}(4\pi)} \quad \text{e} \quad C_n = 0 \quad \forall n \geq 1, n \neq 4.$$

La soluzione del problema proposto sarà infine

$$u(x,y) = C_0 + \frac{\mathrm{Ch}(4\pi x)\cos(4\pi y)}{4\pi \mathrm{Sh}(4\pi)}, \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1).$$

Si noti che tale soluzione dipende dalla costante additiva C_0 (cf. punto **b**).

Esercizio 3.

Determinare la soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 2xt - 3t^2 - e^{-t}, & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Soluzioni

Utilizziamo la formula risolutiva

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} \left(2xt - 3t^2 - e^{-t}\right) dy d\tau.$$

Ricordando l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4\tau}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} dy = \sqrt{4\pi\tau},$$

abbiamo

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} \left(3\tau^2 + e^{-\tau}\right) dy d\tau = \int_0^t \left(3\tau^2 + e^{-\tau}\right) d\tau = t^3 + 1 - e^{-t}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} dy d\tau &= \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-y) e^{-\frac{y^2}{4\tau}} dy d\tau \\ &= x \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4\tau}} dy d\tau - \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{4\tau}} dy d\tau \\ &= x \int_0^t \tau d\tau - \int_0^t \frac{\tau(-2\tau)}{\sqrt{4\pi\tau}} \left[e^{-\frac{y^2}{4\tau}} \right]_{-\infty}^{+\infty} d\tau = \frac{1}{2} x t^2. \end{aligned}$$

Quindi, la soluzione u del problema proposto è

$$u(x,t) = xt^2 - t^3 - 1 + e^{-t}.$$

Esercizio 4.

Determinare la antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{s^2 + 3}{1 - s^4}.$$

Soluzioni

In virtù della decomposizione

$$F(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+1},$$

e ricordando le antitrasformate delle funzioni elementari, abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F](t) &= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t) \\ &= -e^t + e^{-t} + \sin t.\end{aligned}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Politecnico di Milano - Ingegneria Energetica	Metodi Analitici e Numerici (A)	14 Luglio 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Sia $u = u(x,t)$ la soluzione continua del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 0, & \text{in} \quad (0,1) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = 2te^{-\frac{1}{2}t}, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(1,t) = \dfrac{1}{2}te^{-2t} + 1, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(x,0) = 3x^2 - 2x^3, & \text{in} \quad (0,1). \end{cases}$$

a. Mostrare che $u(x,t)$ è non negativa;

b. determinare una limitazione superiore per $u(x,t)$.

Esercizio 2.

Si consideri il problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & & (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ \partial_x u(0,y) = 0, & \partial_x u(1,y) = 0, & y \in (0,1), \\ \partial_y u(x,0) = 0, & \partial_y u(x,1) = 1 - 2\cos^2(2\pi x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

a. Verificare la compatibilità delle condizioni al bordo;

b. specificare se la soluzione di tale problema è unica;

c. determinare una formula di rappresentazione per $u(x,y)$.
[*Suggerimento*: può essere utile ricordare l'identità trignometrica $\cos^2 \vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\vartheta)$]

Esercizio 3.

Determinare la soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 3t^2 - 2xt + e^{-t}, & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Esercizio 4.

Determinare la antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - s + 1}{s^4 - 1}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Politecnico di Milano - Ingegneria Energetica	Metodi Analitici e Numerici (B)	14 Luglio 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Sia $u = u(x,t)$ la soluzione continua del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 0, & \text{in} \quad (0,1) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = 2te^{-\frac{1}{2}t}, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(1,t) = \dfrac{1}{2}te^{-2t} + 1, & \text{in} \quad (0,+\infty), \\ u(x,0) = 4x^3 - 3x^4, & \text{in} \quad (0,1). \end{cases}$$

a. Mostrare che $u(x,t)$ è non negativa;

b. determinare una limitazione superiore per $u(x,t)$.

Esercizio 2.

Si consideri il problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & & (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ \partial_x u(0,y) = 0, & \partial_x u(1,y) = 2\cos^2(2\pi y) - 1, & y \in (0,1), \\ \partial_y u(x,0) = 0, & \partial_y u(x,1) = 0, & x \in (0,1). \end{cases}$$

a. Verificare la compatibilità delle condizioni al bordo;

b. specificare se la soluzione di tale problema è unica;

c. determinare una formula di rappresentazione per $u(x,y)$.
[*Suggerimento*: può essere utile ricordare l'identità trignometrica $\cos^2\vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\vartheta)$]

Esercizio 3.

Determinare la soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 2xt - 3t^2 - e^{-t}, & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Esercizio 4.

Determinare la antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{s^2 + 3}{1 - s^4}.$$