

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale
Politecnico di Milano - Ingegneria Energetica			Metodi Analitici e Numerici (A)	
26 Giugno 2017				
Cognome:			Nome:	
Matricola:				

Esercizio 1.

- a. Si consideri la funzione $v(x, t) = e^{t-x} - e^{-t} + 2e^x$. Calcolare $\partial_t v(x, t) - \partial_x^2 v(x, t)$ e $v(x, 0)$.
- b. Determinare la soluzione $u = u(x, t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = e^{-t} - 2e^x & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Soluzioni

- a. Derivando in t una volta ed in x due volte, si vede facilmente che

$$\partial_t v(x, t) - \partial_x^2 v(x, t) = e^{t-x} + e^{-t} - e^{t-x} - 2e^x = e^{-t} - 2e^x,$$

ed è inoltre immediato verificare che $v(x, 0) = e^{-x} - 1 + 2e^x$. Riassumendo, v è una soluzione della seguente equazione del calore non omogenea

$$\begin{cases} \partial_t v(x, t) - \partial_x^2 v(x, t) = e^{-t} - 2e^x & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ v(x, 0) = e^{-x} - 1 + 2e^x & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

- b. Cerchiamo una soluzione della forma $u = v + w$, ove v è la funzione introdotta nel punto precedente e w risolve la seguente equazione del calore omogenea

$$\begin{cases} \partial_t w(x, t) - \partial_x^2 w(x, t) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ w(x, 0) = -e^{-x} + 1 - 2e^x & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

In base al principio di sovrapposizione (linearità dell'equazione del calore), tale funzione u è soluzione del problema proposto. Posto $K_t(x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ (nucleo del calore) e $\phi(x) = 1 - e^{-x} - 2e^x$ (dato iniziale), utilizzando la formula fondamentale abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} w(x, t) &= (K_t * \phi)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} \left[1 - e^{-(x-y)} - 2e^{x-y} \right] dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy - e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t} + y} dy - 2e^x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t} - y} dy \right]. \end{aligned}$$

Per calcolare esplicitamente gli integrali alle righe sopra, ricordiamo preliminarmente l'identità gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Utilizzando le identità immediate

$$\frac{y^2}{4t} = \left(\frac{y}{\sqrt{4t}} \right)^2, \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{4t} \pm y = \frac{(y \pm 2t)^2}{4t} - t = \left(\frac{y \pm 2t}{\sqrt{4t}} \right)^2 - t$$

deduciamo che

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{4t}}\right)^2} dy = \left[\text{poniamo } z = \frac{y}{\sqrt{4t}} \iff dy = \sqrt{4t} dz \right] \\ &= \sqrt{4t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{4\pi t}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t} \pm y} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y \pm 2t}{\sqrt{4t}}\right)^2 + t} dy = \left[\text{poniamo } z = \frac{y \pm 2t}{\sqrt{4t}} \iff dy = \sqrt{4t} dz \right] \\ &= \sqrt{4t} e^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{4\pi t} e^t. \end{aligned}$$

Tornando alla formula precedente, si ha che

$$w(x, t) = 1 - e^{t-x} - 2e^{t+x},$$

e di conseguenza

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) = 1 - e^{-t} + 2e^x - 2e^{x+t}.$$

In alternativa si può usare la formula di Duhamel

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau} \pm y} \left[e^{-(t-\tau)} - 2e^y \right] dy d\tau.$$

Esercizio 2.

Determinare la soluzione $u = u(x, t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = e^{-2t} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = e^{-x} & \text{in } \mathbb{R}, \\ \partial_t u(x, 0) = e^x & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Soluzioni

Notiamo preliminarmente che l'equazione proposta è una equazione delle onde con velocità $c = 1$. Di conseguenza, utilizzando la formula di d'Alembert, abbiamo

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left[e^{-(x+t)} + e^{-(x-t)} \right] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} e^y dy + \frac{1}{2} \int_0^t \left[\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} e^{-2\tau} dy \right] d\tau = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} (e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2} [e^y]_{x-t}^{x+t} + \int_0^t e^{-2\tau} (t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} (e^t + e^{-t}) + \frac{e^x}{2} (e^t - e^{-t}) + t \int_0^t e^{-2\tau} d\tau - \int_0^t \tau e^{-2\tau} d\tau = \\ &= e^{-x} \cosh(t) + e^x \sinh(t) - \frac{1}{2} t [e^{-2\tau}]_0^t + \frac{1}{4} [e^{-2\tau} (2\tau + 1)]_0^t = \\ &= e^{-x} \cosh(t) + e^x \sinh(t) - \frac{1}{2} t (e^{-2t} - 1) + \frac{1}{4} [e^{-2t} (2t + 1) - 1] = \\ &= e^{-x} \cosh(t) + e^x \sinh(t) + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{96\sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{(8x^2 + 9)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzioni

Notiamo preliminarmente che la funzione trasformanda f si può riscrivere come

$$f(x) = \frac{48\sqrt{2}}{i} \left(e^{\frac{x}{2}i} - e^{-\frac{x}{2}i} \right) \frac{1}{(8x^2 + 9)^2}.$$

Di conseguenza, per proprietà della trasformata, possiamo subito dire che:

$$\hat{f}(k) = \frac{48\sqrt{2}}{i} \left\{ \mathcal{F} \left[\frac{1}{(8x^2 + 9)^2} \right] \left(k - \frac{1}{2} \right) - \mathcal{F} \left[\frac{1}{(8x^2 + 9)^2} \right] \left(k + \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Se avessimo $g(x) = \frac{1}{8x^2 + 9}$, troveremmo:

$$\hat{g}(k) = \mathcal{F} \left[\frac{1}{8x^2 + 9} \right] (k) = \mathcal{F} \left[\frac{1}{(2\sqrt{2}x)^2 + 3^2} \right] (k) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2 + 3^2} \right] \left(\frac{k}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{3} e^{-3 \left| \frac{k}{2\sqrt{2}} \right|}$$

(abbiamo usato una proprietà della trasformata e poi una trasformata notevole).

Per calcolare la trasformata di $\frac{1}{(8x^2 + 9)^2}$ riconducendosi a \hat{g} , riscriviamo:

$$\frac{1}{(8x^2 + 9)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{8x^2 + 9 - 8x^2}{(8x^2 + 9)^2} = \frac{1}{9} \left\{ \frac{1}{8x^2 + 9} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-16x}{(8x^2 + 9)^2} \right\} = \frac{1}{9} \left\{ \frac{1}{8x^2 + 9} + \frac{x}{2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{8x^2 + 9} \right\}.$$

A questo punto, usando alcune altre proprietà della trasformata, otteniamo quanto segue.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{1}{(8x^2 + 9)^2} \right] (k) &= \frac{1}{9} \mathcal{F} [g(x)] (k) + \frac{1}{18} \mathcal{F} [x \cdot g'(x)] (k) = \\ &= \frac{1}{9} \hat{g}(k) + \frac{1}{18} i \frac{d}{dk} \mathcal{F} [g'(x)] (k) = \frac{1}{9} \hat{g}(k) + \frac{1}{18} i \frac{d}{dk} \{ ik \hat{g}(k) \} = \\ &= \frac{1}{9} \hat{g}(k) + \frac{i^2}{18} \frac{d}{dk} \{ k \hat{g}(k) \} = \frac{1}{9} \hat{g}(k) - \frac{1}{18} \left\{ \hat{g}(k) + k \frac{d}{dk} \hat{g}(k) \right\} = \\ &= \frac{1}{9} \hat{g}(k) - \frac{1}{18} \hat{g}(k) - \frac{k}{18} \hat{g}'(k) = \frac{1}{18} \hat{g}(k) - \frac{k}{18} \hat{g}'(k) = \\ &= \frac{\pi}{18 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3} \left\{ e^{-3 \left| \frac{k}{2\sqrt{2}} \right|} - k \frac{-3 \operatorname{sgn} k}{2\sqrt{2}} e^{-3 \left| \frac{k}{2\sqrt{2}} \right|} \right\} = \frac{\pi e^{-3 \left| \frac{k}{2\sqrt{2}} \right|}}{108\sqrt{2}} \left\{ 1 + \frac{3|k|}{2\sqrt{2}} \right\} \end{aligned}$$

Possiamo infine concludere:

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{48\sqrt{2}}{i} \cdot \frac{\pi}{108\sqrt{2}} \left\{ e^{-3 \left| \frac{k-1/2}{2\sqrt{2}} \right|} \left(1 + \frac{3|k-1/2|}{2\sqrt{2}} \right) - e^{-3 \left| \frac{k+1/2}{2\sqrt{2}} \right|} \left(1 + \frac{3|k+1/2|}{2\sqrt{2}} \right) \right\} = \\ &= -\frac{4\pi i}{9} \left\{ e^{-3 \left| \frac{k-1/2}{2\sqrt{2}} \right|} \left(1 + \frac{3|k-1/2|}{2\sqrt{2}} \right) - e^{-3 \left| \frac{k+1/2}{2\sqrt{2}} \right|} \left(1 + \frac{3|k+1/2|}{2\sqrt{2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.

Utilizzando la trasformata di Laplace, determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 20e^{3t}, & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 7. \end{cases}$$

Soluzioni

Definiamo preliminarmente la notazione standard

$$\mathcal{L}[y](s) = \bar{y}(s), \quad s \in (0, +\infty) \quad (\text{Trasformata di Laplace}).$$

Applichiamo quindi la trasformata di Laplace al termine di sinistra dell'equazione e imponiamo le condizioni iniziali. Si ha

$$s^2\bar{y}(s) - sy(0) - y'(0) + 3s\bar{y}(s) - 3y(0) + 2\bar{y}(s) = (s^2 + 3s + 2)\bar{y}(s) - 7 = (s + 1)(s + 2)\bar{y}(s) - 7.$$

Ricordando inoltre che

$$\mathcal{L}[20e^{3t}](s) = \frac{20}{s - 3} \quad s \in (3, +\infty),$$

concludiamo che

$$\bar{y}(s) = \frac{7}{(s + 1)(s + 2)} + \frac{20}{(s + 1)(s + 2)(s - 3)} = \frac{7s - 1}{(s + 1)(s + 2)(s - 3)}.$$

In virtù della decomposizione

$$\frac{7s - 1}{(s + 1)(s + 2)(s - 3)} = \frac{2}{s + 1} - \frac{3}{s + 2} + \frac{1}{s - 3},$$

deduciamo infine che

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\bar{y}](t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 1}\right](t) - 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - 3}\right](t) \\ &= 2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{3t}. \end{aligned}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale
Politecnico di Milano - Ingegneria Energetica			Metodi Analitici e Numerici (B)	
26 Giugno 2017				
Cognome:			Nome:	
Matricola:				

Esercizio 1.

- a. Si consideri la funzione $v(x, t) = e^{t-x} + 2e^{-t} - e^x$. Calcolare $\partial_t v(x, t) - \partial_x^2 v(x, t)$ e $v(x, 0)$.
- b. Determinare la soluzione $u = u(x, t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = e^x - 2e^{-t} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Soluzioni

- a. Derivando in t una volta ed in x due volte, si vede facilmente che

$$\partial_t v(x, t) - \partial_x^2 v(x, t) = e^{t-x} - 2e^{-t} - e^{t-x} + e^x = e^x - 2e^{-t},$$

ed è inoltre immediato verificare che $v(x, 0) = 2 + e^{-x} - e^x$. Riassumendo, v è una soluzione della seguente equazione del calore non omogenea

$$\begin{cases} \partial_t v(x, t) - \partial_x^2 v(x, t) = e^x - 2e^{-t} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ v(x, 0) = 2 + e^{-x} - e^x & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

- b. Cerchiamo una soluzione della forma $u = v + w$, ove v È la funzione introdotta nel punto precedente e w risolve la seguente equazione del calore omogenea

$$\begin{cases} \partial_t w(x, t) - \partial_x^2 w(x, t) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ w(x, 0) = -2 - e^{-x} + e^x & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

In base al principio di sovrapposizione (linearità dell'equazione del calore), tale funzione u è soluzione del problema proposto. Posto $K_t(x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ (*nucleo del calore*) e $\phi(x) = -2 - e^{-x} + e^x$ (*dato iniziale*), utilizzando la formula fondamentale abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} w(x, t) &= (K_t * \phi)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} \left[-2 - e^{-(x-y)} + e^{x-y} \right] dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[-2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy - e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t} + y} dy + e^x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t} - y} dy \right]. \end{aligned}$$

Per calcolare esplicitamente gli integrali alle riga sopra, ricordiamo preliminarmente l'identità gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Utilizzando le identità immediate

$$\frac{y^2}{4t} = \left(\frac{y}{\sqrt{4t}} \right)^2, \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{4t} \pm y = \frac{(y \pm 2t)^2}{4t} - t = \left(\frac{y \pm 2t}{\sqrt{4t}} \right)^2 - t$$

deduciamo che

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{4t}}\right)^2} dy = \left[\text{poniamo } z = \frac{y}{\sqrt{4t}} \iff dy = \sqrt{4t} dz \right] \\ &= \sqrt{4t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{4\pi t}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t} \pm y} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y \pm 2t}{\sqrt{4t}}\right)^2 + t} dy = \left[\text{poniamo } z = \frac{y \pm 2t}{\sqrt{4t}} \iff dy = \sqrt{4t} dz \right] \\ &= \sqrt{4t} e^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{4\pi t} e^t. \end{aligned}$$

Tornando alla formula precedente, si ha che

$$w(x, t) = -2 - e^{t-x} + e^{t+x},$$

e di conseguenza

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) = 2e^{-t} - e^x - 2 + e^{x+t}.$$

In alternativa si può usare la formula di Duhamel

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau} \pm y} \left[e^y - 2e^{-(t-\tau)} \right] dy d\tau.$$

Esercizio 2.

Determinare la soluzione $u = u(x, t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = e^{2t} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = e^{-x} & \text{in } \mathbb{R}, \\ \partial_t u(x, 0) = e^x & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Soluzioni

Notiamo preliminarmente che l'equazione proposta è una equazione delle onde con velocità $c = 1$. Di conseguenza, utilizzando la formula di d'Alembert, abbiamo

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left[e^{-(x+t)} + e^{-(x-t)} \right] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} e^y dy + \frac{1}{2} \int_0^t \left[\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} e^{2\tau} dy \right] d\tau = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} (e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2} [e^y]_{x-t}^{x+t} + \int_0^t e^{2\tau} (t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} (e^t + e^{-t}) + \frac{e^x}{2} (e^t - e^{-t}) + t \int_0^t e^{2\tau} d\tau - \int_0^t \tau e^{2\tau} d\tau = \\ &= e^{-x} \cosh(t) + e^x \sinh(t) + \frac{1}{2} t [e^{2\tau}]_0^t - \frac{1}{4} [e^{2\tau} (2\tau - 1)]_0^t = \\ &= e^{-x} \cosh(t) + e^x \sinh(t) + \frac{1}{2} t (e^{2t} - 1) - \frac{1}{4} [e^{2t} (2t - 1) + 1] = \\ &= e^{-x} \cosh(t) + e^x \sinh(t) - \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = -\frac{96\sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{(8x^2 + 9)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzioni

Notiamo preliminarmente che la funzione trasformanda f si può riscrivere come

$$f(x) = -48\sqrt{2} \left(e^{\frac{x}{2}i} + e^{-\frac{x}{2}i} \right) \frac{1}{(8x^2 + 9)^2}.$$

Di conseguenza, per proprietà della trasformata, possiamo subito dire che:

$$\hat{f}(k) = -48\sqrt{2} \left\{ \mathcal{F} \left[\frac{1}{(8x^2 + 9)^2} \right] \left(k - \frac{1}{2} \right) + \mathcal{F} \left[\frac{1}{(8x^2 + 9)^2} \right] \left(k + \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Se avessimo $g(x) = \frac{1}{8x^2 + 9}$, troveremmo:

$$\hat{g}(k) = \mathcal{F} \left[\frac{1}{8x^2 + 9} \right] (k) = \mathcal{F} \left[\frac{1}{(2\sqrt{2}x)^2 + 3^2} \right] (k) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2 + 3^2} \right] \left(\frac{k}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{3} e^{-3\left|\frac{k}{2\sqrt{2}}\right|}$$

(abbiamo usato una proprietà della trasformata e poi una trasformata notevole).

Per calcolare la trasformata di $\frac{1}{(8x^2+9)^2}$ riconducendosi a \hat{g} , riscriviamo:

$$\frac{1}{(8x^2 + 9)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{8x^2 + 9 - 8x^2}{(8x^2 + 9)^2} = \frac{1}{9} \left\{ \frac{1}{8x^2 + 9} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-16x}{(8x^2 + 9)^2} \right\} = \frac{1}{9} \left\{ \frac{1}{8x^2 + 9} + \frac{x}{2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{8x^2 + 9} \right\}.$$

A questo punto, usando alcune altre proprietà della trasformata, otteniamo quanto segue.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{1}{(8x^2 + 9)^2} \right] (k) &= \frac{1}{9} \mathcal{F} [g(x)] (k) + \frac{1}{18} \mathcal{F} [x \cdot g'(x)] (k) = \\ &= \frac{1}{9} \hat{g}(k) + \frac{1}{18} i \frac{d}{dk} \mathcal{F} [g'(x)] (k) = \frac{1}{9} \hat{g}(k) + \frac{1}{18} i \frac{d}{dk} \{ ik \hat{g}(k) \} = \\ &= \frac{1}{9} \hat{g}(k) + \frac{i^2}{18} \frac{d}{dk} \{ k \hat{g}(k) \} = \frac{1}{9} \hat{g}(k) - \frac{1}{18} \left\{ \hat{g}(k) + k \frac{d}{dk} \hat{g}(k) \right\} = \\ &= \frac{1}{9} \hat{g}(k) - \frac{1}{18} \hat{g}(k) - \frac{k}{18} \hat{g}'(k) = \frac{1}{18} \hat{g}(k) - \frac{k}{18} \hat{g}'(k) = \\ &= \frac{\pi}{18 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3} \left\{ e^{-3\left|\frac{k}{2\sqrt{2}}\right|} - k \frac{-3\operatorname{sgn}k}{2\sqrt{2}} e^{-3\left|\frac{k}{2\sqrt{2}}\right|} \right\} = \frac{\pi e^{-3\left|\frac{k}{2\sqrt{2}}\right|}}{108\sqrt{2}} \left\{ 1 + \frac{3|k|}{2\sqrt{2}} \right\} \end{aligned}$$

Possiamo infine concludere:

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= -48\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{108\sqrt{2}} \left\{ e^{-3\left|\frac{k-1/2}{2\sqrt{2}}\right|} \left(1 + \frac{3|k-1/2|}{2\sqrt{2}} \right) + e^{-3\left|\frac{k+1/2}{2\sqrt{2}}\right|} \left(1 + \frac{3|k+1/2|}{2\sqrt{2}} \right) \right\} = \\ &= -\frac{4\pi}{9} \left\{ e^{-3\left|\frac{k-1/2}{2\sqrt{2}}\right|} \left(1 + \frac{3|k-1/2|}{2\sqrt{2}} \right) + e^{-3\left|\frac{k+1/2}{2\sqrt{2}}\right|} \left(1 + \frac{3|k+1/2|}{2\sqrt{2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.

Utilizzando la trasformata di Laplace, determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 20e^{-3t}, & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Soluzioni

Definiamo preliminarmente la notazione standard

$$\mathcal{L}[y](s) = \bar{y}(s), \quad s \in (0, +\infty) \quad (\text{Trasformata di Laplace}).$$

Applichiamo quindi la trasformata di Laplace al termine di sinistra dell'equazione e imponiamo le condizioni iniziali. Si ha

$$s^2\bar{y}(s) - sy(0) - y'(0) - 3s\bar{y}(s) + 3y(0) + 2\bar{y}(s) = (s^2 - 3s + 2)\bar{y}(s) + 2 = (s-1)(s-2)\bar{y}(s) + 2.$$

Ricordando inoltre che

$$\mathcal{L}[20e^{-3t}](s) = \frac{20}{s+3} \quad s \in (-3, +\infty),$$

concludiamo che

$$\bar{y}(s) = -\frac{2}{(s-1)(s-2)} + \frac{20}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \frac{-2s+14}{(s-1)(s-2)(s+3)}.$$

In virtù della decomposizione

$$\frac{-2s+14}{(s-1)(s-2)(s+3)} = -\frac{3}{s-1} + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s+3},$$

deduciamo infine che

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\bar{y}](t) = -3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right](t) \\ &= -3e^t + 2e^{2t} + e^{-3t}. \end{aligned}$$