Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Politecnico di Milano - Ingegneria Energetica	Metodi Analitici e Numerici (A)	26 Giugno 2017
Cognome:	Nome:	Matricola:

Esercizio 1.

a. Si consideri la funzione $v(x,t) = e^{t-x} - e^{-t} + 2e^{x}$. Calcolare $\partial_t v(x,t) - \partial_x^2 v(x,t)$ e $v(x,0)$.

b. Determinare la soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = e^{-t} - 2e^{x} & \text{in} \quad \mathbb{R}\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Soluzioni

a. Derivando in t una volta ed in x due volte, si vede facilmente che

$$\partial_t v(x,t) - \partial_x^2 v(x,t) = e^{t-x} + e^{-t} - e^{t-x} - 2e^{x} = e^{-t} - 2e^{x},$$

ed è inoltre immediato verificare che $v(x,0) = e^{-x} - 1 + 2e^{x}$. Riassumendo, v è una soluzione della seguente equazione del calore non omogenea

$$\begin{cases} \partial_t v(x,t) - \partial_x^2 v(x,t) = e^{-t} - 2e^{x} & \text{in} \quad \mathbb{R}\times(0,+\infty), \\ v(x,0) = e^{-x} - 1 + 2e^{x} & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

b. Cerchiamo una soluzione della forma $u = v + w$, ove v Ë la funzione introdotta nel punto precedente e w risolve la seguente equazione del calore omogenea

$$\begin{cases} \partial_t w(x,t) - \partial_x^2 w(x,t) = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}\times(0,+\infty), \\ w(x,0) = -e^{-x} + 1 - 2e^{x} & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

In base al principio di sovrapposizione (linearità dell'equazione del calore), tale funzione u è soluzione del problema proposto. Posto $K_t(x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ (*nucleo del calore*) e $\phi(x) = 1 - e^{-x} - 2e^{x}$ (*dato iniziale*), utilizzando la formula fondamentale abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} w(x,t) = (K_t * \phi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} \left[1 - e^{-(x-y)} - 2e^{x-y}\right] dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy - e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}+y} dy - 2e^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}-y} dy\right]. \end{aligned}$$

Per calcolare esplicitamente gli integrali alle riga sopra, ricordiamo preliminarmente l'identità gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Utilizzando le identità immediate

$$\frac{y^2}{4t} = \left(\frac{y}{\sqrt{4t}}\right)^2, \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{4t} \pm y = \frac{(y \pm 2t)^2}{4t} - t = \left(\frac{y \pm 2t}{\sqrt{4t}}\right)^2 - t$$

deduciamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{4t}}\right)^2} dy = \left[\text{poniamo } z = \frac{y}{\sqrt{4t}} \iff dy = \sqrt{4t}dz\right]$$

$$= \sqrt{4t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{4\pi t},$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t} \pm y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y \pm 2t}{\sqrt{4t}}\right)^2 + t} dy = \left[\text{poniamo } z = \frac{y \pm 2t}{\sqrt{4t}} \iff dy = \sqrt{4t}dz\right]$$

$$= \sqrt{4t} e^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{4\pi t} e^t.$$

Tornando alla formula precedente, si ha che

$$w(x,t) = 1 - e^{t-x} - 2e^{t+x},$$

e di conseguenza

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = 1 - e^{-t} + 2e^x - 2e^{x+t}.$$

In alternativa si può usare la formula di Duhamel

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} \pm y} \left[e^{-(t-\tau)} - 2e^y\right] dy d\tau.$$

Esercizio 2.

Determinare la soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = e^{-2t} & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = e^{-x} & \text{in} \quad \mathbb{R}, \\ \partial_t u(x,0) = e^{x} & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Soluzioni

Notiamo preliminarmente che l'equazione proposta è una equazione delle onde con velocità $c = 1$. Di conseguenza, utilizzando la formula di d'Alembert, abbiamo

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[e^{-(x+t)} + e^{-(x-t)}\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^y dy + \frac{1}{2}\int_0^t \left[\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} e^{-2\tau} dy\right] d\tau =$$

$$= \frac{e^{-x}}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) + \frac{1}{2}\left[e^y\right]_{x-t}^{x+t} + \int_0^t e^{-2\tau}(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{e^{-x}}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) + \frac{e^x}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) + t\int_0^t e^{-2\tau} d\tau - \int_0^t \tau e^{-2\tau} d\tau =$$

$$= e^{-x}\cosh(t) + e^x \sinh(t) - \frac{1}{2}t\left[e^{-2\tau}\right]_0^t + \frac{1}{4}\left[e^{-2\tau}(2\tau+1)\right]_0^t =$$

$$= e^{-x}\cosh(t) + e^x \sinh(t) - \frac{1}{2}t\left(e^{-2t} - 1\right) + \frac{1}{4}\left[e^{-2t}(2t+1) - 1\right] =$$

$$= e^{-x}\cosh(t) + e^x \sinh(t) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}.$$

Esercizio 3.

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{96\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{(8x^2+9)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzioni

Notiamo preliminarmente che la funzione trasformanda f si può riscrivere come

$$f(x) = \frac{48\sqrt{2}}{i}\left(e^{\frac{x}{2}i} - e^{-\frac{x}{2}i}\right)\frac{1}{(8x^2+9)^2}\ .$$

Di conseguenza, per proprietà della trasformata, possiamo subito dire che:

$$\hat{f}(k) = \frac{48\sqrt{2}}{i}\left\{\mathcal{F}\left[\frac{1}{(8x^2+9)^2}\right]\left(k-\frac{1}{2}\right) - \mathcal{F}\left[\frac{1}{(8x^2+9)^2}\right]\left(k+\frac{1}{2}\right)\right\}\ .$$

Se avessimo $g(x) = \frac{1}{8x^2+9}$, troveremmo:

$$\hat{g}(k) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{8x^2+9}\right](k) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{(2\sqrt{2}\,x)^2+3^2}\right](k) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+3^2}\right]\left(\frac{k}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{3}\,e^{-3\left|\frac{k}{2\sqrt{2}}\right|}$$

(abbiamo usato una proprietà della trasformata e poi una trasformata notevole).
Per calcolare la trasformata di $\frac{1}{(8x^2+9)^2}$ riconducendosi a $\hat{g}$, riscriviamo:

$$\frac{1}{(8x^2+9)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{8x^2+9-8x^2}{(8x^2+9)^2} = \frac{1}{9}\left\{\frac{1}{8x^2+9} + \frac{x}{2}\cdot\frac{-16x}{(8x^2+9)^2}\right\} = \frac{1}{9}\left\{\frac{1}{8x^2+9} + \frac{x}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{8x^2+9}\right\}\ .$$

A questo punto, usando alcune altre proprietà della trasformata, otteniamo quanto segue.

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{(8x^2+9)^2}\right](k) = \frac{1}{9}\,\mathcal{F}\left[g(x)\right](k) + \frac{1}{18}\,\mathcal{F}\left[x\cdot g'(x)\right](k) =$$

$$= \frac{1}{9}\,\hat{g}(k) + \frac{1}{18}\,i\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\,\mathcal{F}\left[g'(x)\right](k) = \frac{1}{9}\,\hat{g}(k) + \frac{1}{18}\,i\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left\{ik\,\hat{g}(k)\right\} =$$

$$= \frac{1}{9}\,\hat{g}(k) + \frac{i^2}{18}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left\{k\,\hat{g}(k)\right\} = \frac{1}{9}\,\hat{g}(k) - \frac{1}{18}\left\{\hat{g}(k) + k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\hat{g}(k)\right\} =$$

$$= \frac{1}{9}\,\hat{g}(k) - \frac{1}{18}\,\hat{g}(k) - \frac{k}{18}\,\hat{g}'(k) = \frac{1}{18}\,\hat{g}(k) - \frac{k}{18}\,\hat{g}'(k) =$$

$$= \frac{\pi}{18\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3}\left\{e^{-3\left|\frac{k}{2\sqrt{2}}\right|} - k\,\frac{-3\mathrm{sgn}k}{2\sqrt{2}}\,e^{-3\left|\frac{k}{2\sqrt{2}}\right|}\right\} = \frac{\pi\,e^{-3\left|\frac{k}{2\sqrt{2}}\right|}}{108\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{3|k|}{2\sqrt{2}}\right\}$$

Possiamo infine concludere:

$$\hat{f}(k) = \frac{48\sqrt{2}}{i}\cdot\frac{\pi}{108\sqrt{2}}\left\{e^{-3\left|\frac{k-1/2}{2\sqrt{2}}\right|}\left(1 + \frac{3|k-1/2|}{2\sqrt{2}}\right) - e^{-3\left|\frac{k+1/2}{2\sqrt{2}}\right|}\left(1 + \frac{3|k+1/2|}{2\sqrt{2}}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{4\pi\,i}{9}\left\{e^{-3\left|\frac{k-1/2}{2\sqrt{2}}\right|}\left(1 + \frac{3|k-1/2|}{2\sqrt{2}}\right) - e^{-3\left|\frac{k+1/2}{2\sqrt{2}}\right|}\left(1 + \frac{3|k+1/2|}{2\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Esercizio 4.

Utilizzando la trasformata di Laplace, determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 20e^{3t}, \quad t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 7. \end{cases}$$

Soluzioni

Definiamo preliminarmente la notazione standard

$$\mathcal{L}[y](s) = \overline{y}(s), \quad s \in (0, +\infty) \quad (\textit{Trasformata di Laplace}).$$

Applichiamo quindi la trasformata di Laplace al termine di sinistra dell'equazione e imponiamo le condizioni iniziali. Si ha

$$s^2\overline{y}(s) - sy(0) - y'(0) + 3s\overline{y}(s) - 3y(0) + 2\overline{y}(s) = \left(s^2 + 3s + 2\right)\overline{y}(s) - 7 = (s+1)(s+2)\overline{y}(s) - 7.$$

Ricordando inoltre che

$$\mathcal{L}[20e^{3t}](s) = \frac{20}{s-3} \quad s \in (3, +\infty),$$

concludiamo che

$$\overline{y}(s) = \frac{7}{(s+1)(s+2)} + \frac{20}{(s+1)(s+2)(s-3)} = \frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}.$$

In virtù della decomposizione

$$\frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)} = \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s-3},$$

deduciamo infine che

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\overline{y}](t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](t) - 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right](t) \\ &= 2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{3t}. \end{aligned}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Politecnico di Milano - Ingegneria Energetica	Metodi Analitici e Numerici (B)	26 Giugno 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

a. Si consideri la funzione $v(x,t) = e^{t-x} + 2e^{-t} - e^{x}$. Calcolare $\partial_t v(x,t) - \partial_x^2 v(x,t)$ e $v(x,0)$.

b. Determinare la soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = e^x - 2e^{-t} & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Soluzioni

a. Derivando in t una volta ed in x due volte, si vede facilmente che

$$\partial_t v(x,t) - \partial_x^2 v(x,t) = e^{t-x} - 2e^{-t} - e^{t-x} + e^x = e^x - 2e^{-t},$$

ed è inoltre immediato verificare che $v(x,0) = 2 + e^{-x} - e^x$. Riassumendo, v è una soluzione della seguente equazione del calore non omogenea

$$\begin{cases} \partial_t v(x,t) - \partial_x^2 v(x,t) = e^x - 2e^{-t} & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,+\infty), \\ v(x,0) = 2 + e^{-x} - e^x & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

b. Cerchiamo una soluzione della forma $u = v + w$, ove v Ë la funzione introdotta nel punto precedente e w risolve la seguente equazione del calore omogenea

$$\begin{cases} \partial_t w(x,t) - \partial_x^2 w(x,t) = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,+\infty), \\ w(x,0) = -2 - e^{-x} + e^x & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

In base al principio di sovrapposizione (linearità dell'equazione del calore), tale funzione u è soluzione del problema proposto. Posto $K_t(x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ (*nucleo del calore*) e $\phi(x) = -2 - e^{-x} + e^x$ (*dato iniziale*), utilizzando la formula fondamentale abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} w(x,t) = (K_t * \phi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} \left[-2 - e^{-(x-y)} + e^{x-y} \right] dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[-2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy - e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}+y} dy + e^x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}-y} dy \right]. \end{aligned}$$

Per calcolare esplicitamente gli integrali alle riga sopra, ricordiamo preliminarmente l'identità gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Utilizzando le identità immediate

$$\frac{y^2}{4t} = \left(\frac{y}{\sqrt{4t}}\right)^2, \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{4t} \pm y = \frac{(y \pm 2t)^2}{4t} - t = \left(\frac{y \pm 2t}{\sqrt{4t}}\right)^2 - t$$

deduciamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{4t}}\right)^2} dy = \left[\text{poniamo } z = \frac{y}{\sqrt{4t}} \iff dy = \sqrt{4t} dz\right]$$

$$= \sqrt{4t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{4\pi t},$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t} \pm y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y \pm 2t}{\sqrt{4t}}\right)^2 + t} dy = \left[\text{poniamo } z = \frac{y \pm 2t}{\sqrt{4t}} \iff dy = \sqrt{4t} dz\right]$$

$$= \sqrt{4t} e^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{4\pi t} e^t.$$

Tornando alla formula precedente, si ha che

$$w(x,t) = -2 - e^{t-x} + e^{t+x},$$

e di conseguenza

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = 2e^{-t} - e^x - 2 + e^{x+t}.$$

In alternativa si può usare la formula di Duhamel

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} \pm y} \left[e^y - 2e^{-(t-\tau)}\right] dy d\tau.$$

Esercizio 2.

Determinare la soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = e^{2t} & \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = e^{-x} & \text{in} \quad \mathbb{R}, \\ \partial_t u(x,0) = e^{x} & \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare i risultati.

Soluzioni

Notiamo preliminarmente che l'equazione proposta è una equazione delle onde con velocità $c = 1$. Di conseguenza, utilizzando la formula di d'Alembert, abbiamo

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[e^{-(x+t)} + e^{-(x-t)}\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^y dy + \frac{1}{2}\int_0^t \left[\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} e^{2\tau} dy\right] d\tau = \\ &= \frac{e^{-x}}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) + \frac{1}{2}\left[e^y\right]_{x-t}^{x+t} + \int_0^t e^{2\tau}(t-\tau) d\tau = \\ &= \frac{e^{-x}}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) + \frac{e^x}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) + t\int_0^t e^{2\tau} d\tau - \int_0^t \tau e^{2\tau} d\tau = \\ &= e^{-x}\cosh(t) + e^x \sinh(t) + \frac{1}{2}t\left[e^{2\tau}\right]_0^t - \frac{1}{4}\left[e^{2\tau}(2\tau - 1)\right]_0^t = \\ &= e^{-x}\cosh(t) + e^x \sinh(t) + \frac{1}{2}t\left(e^{2t} - 1\right) - \frac{1}{4}\left[e^{2t}(2t-1) + 1\right] = \\ &= e^{-x}\cosh(t) + e^x \sinh(t) - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = -\frac{96\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{(8x^2+9)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzioni

Notiamo preliminarmente che la funzione trasformanda f si può riscrivere come

$$f(x) = -48\sqrt{2}\left(e^{\frac{x}{2}i} + e^{-\frac{x}{2}i}\right)\frac{1}{(8x^2+9)^2}\ .$$

Di conseguenza, per proprietà della trasformata, possiamo subito dire che:

$$\hat{f}(k) = -48\sqrt{2}\left\{\mathcal{F}\left[\frac{1}{(8x^2+9)^2}\right]\left(k-\frac{1}{2}\right) + \mathcal{F}\left[\frac{1}{(8x^2+9)^2}\right]\left(k+\frac{1}{2}\right)\right\}\ .$$

Se avessimo $g(x) = \frac{1}{8x^2+9}$, troveremmo:

$$\hat{g}(k) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{8x^2+9}\right](k) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{(2\sqrt{2}\,x)^2+3^2}\right](k) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+3^2}\right]\left(\frac{k}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{3}\,e^{-3\left|\frac{k}{2\sqrt{2}}\right|}$$

(abbiamo usato una proprietà della trasformata e poi una trasformata notevole).
Per calcolare la trasformata di $\frac{1}{(8x^2+9)^2}$ riconducendosi a $\hat{g}$, riscriviamo:

$$\frac{1}{(8x^2+9)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{8x^2+9-8x^2}{(8x^2+9)^2} = \frac{1}{9}\left\{\frac{1}{8x^2+9} + \frac{x}{2}\cdot\frac{-16x}{(8x^2+9)^2}\right\} = \frac{1}{9}\left\{\frac{1}{8x^2+9} + \frac{x}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{8x^2+9}\right\}\ .$$

A questo punto, usando alcune altre proprietà della trasformata, otteniamo quanto segue.

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{(8x^2+9)^2}\right](k) = \frac{1}{9}\,\mathcal{F}\left[g(x)\right](k) + \frac{1}{18}\,\mathcal{F}\left[x\cdot g'(x)\right](k) =$$

$$= \frac{1}{9}\,\hat{g}(k) + \frac{1}{18}\,i\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\,\mathcal{F}\left[g'(x)\right](k) = \frac{1}{9}\,\hat{g}(k) + \frac{1}{18}\,i\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left\{ik\,\hat{g}(k)\right\} =$$

$$= \frac{1}{9}\,\hat{g}(k) + \frac{i^2}{18}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left\{k\,\hat{g}(k)\right\} = \frac{1}{9}\,\hat{g}(k) - \frac{1}{18}\left\{\hat{g}(k) + k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\hat{g}(k)\right\} =$$

$$= \frac{1}{9}\,\hat{g}(k) - \frac{1}{18}\,\hat{g}(k) - \frac{k}{18}\,\hat{g}'(k) = \frac{1}{18}\,\hat{g}(k) - \frac{k}{18}\,\hat{g}'(k) =$$

$$= \frac{\pi}{18\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3}\left\{e^{-3\left|\frac{k}{2\sqrt{2}}\right|} - k\,\frac{-3\mathrm{sgn}k}{2\sqrt{2}}\,e^{-3\left|\frac{k}{2\sqrt{2}}\right|}\right\} = \frac{\pi\,e^{-3\left|\frac{k}{2\sqrt{2}}\right|}}{108\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{3|k|}{2\sqrt{2}}\right\}$$

Possiamo infine concludere:

$$\hat{f}(k) = -48\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{108\sqrt{2}}\left\{e^{-3\left|\frac{k-1/2}{2\sqrt{2}}\right|}\left(1+\frac{3|k-1/2|}{2\sqrt{2}}\right) + e^{-3\left|\frac{k+1/2}{2\sqrt{2}}\right|}\left(1+\frac{3|k+1/2|}{2\sqrt{2}}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{4\pi}{9}\left\{e^{-3\left|\frac{k-1/2}{2\sqrt{2}}\right|}\left(1+\frac{3|k-1/2|}{2\sqrt{2}}\right) + e^{-3\left|\frac{k+1/2}{2\sqrt{2}}\right|}\left(1+\frac{3|k+1/2|}{2\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Esercizio 4.

Utilizzando la trasformata di Laplace, determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 20e^{-3t}, \quad t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Soluzioni

Definiamo preliminarmente la notazione standard

$$\mathcal{L}[y](s) = \overline{y}(s), \quad s \in (0, +\infty) \quad (\textit{Trasformata di Laplace}).$$

Applichiamo quindi la trasformata di Laplace al termine di sinistra dell'equazione e imponiamo le condizioni iniziali. Si ha

$$s^2\overline{y}(s) - sy(0) - y'(0) - 3s\overline{y}(s) + 3y(0) + 2\overline{y}(s) = \left(s^2 - 3s + 2\right)\overline{y}(s) + 2 = (s-1)(s-2)\overline{y}(s) + 2.$$

Ricordando inoltre che

$$\mathcal{L}[20e^{-3t}](s) = \frac{20}{s+3} \quad s \in (-3, +\infty),$$

concludiamo che

$$\overline{y}(s) = -\frac{2}{(s-1)(s-2)} + \frac{20}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \frac{-2s+14}{(s-1)(s-2)(s+3)}.$$

In virtù della decomposizione

$$\frac{-2s+14}{(s-1)(s-2)(s+3)} = -\frac{3}{s-1} + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s+3},$$

deduciamo infine che

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\overline{y}](t) &= -3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right](t) \\ &= -3e^t + 2e^{2t} + e^{-3t}. \end{aligned}$$