Corso di Statistica - Prof. Fabio Zucca		**I Prova in itinere - 4 maggio 2016**	
Nome e cognome:		**Matricola:**	
			8994

Esercizio 1 Si consideri la seguente famiglia di funzioni di parametro $k \in \mathbb{R}$

$$f_k(x) := \begin{cases} 1/x^5 & x \in [k, +\infty) \\ 0 & x < k. \end{cases}$$

1. Mostrare che $k = 1/\sqrt{2}$ è l'unico valore per cui f_k rappresenta la densità di una variabile aleatoria assolutamente continua X.
2. Calcolare valore atteso e varianza di X.
3. Calcolare la funzione di ripartizione F di X.
4. Calcolare $\mathbb{P}(X > 2)$ e $\mathbb{P}(|X| < 2)$.
5. Calcolare per ogni $\alpha \in (0, 1)$ il valore $q_\alpha := \min\{t \colon F(t) \geq \alpha\}$.

Soluzione.

1. La funzione f_k è non negativa se e solo se $k \geq 0$. Inoltre

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_k^{\infty} \frac{1}{x^5}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4x^4}|_k^{\infty} = \frac{1}{4k^4}$$

da cui si ha l'unica soluzione $k = 1/\sqrt{2}$.

2. $$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3x^3}|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} = \frac{\sqrt{8}}{3}.$$

Ricordando che $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ calcoliamo

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x^2}|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} = 1$$

da cui $\mathrm{var}(X) = 1 - 8/9 = 1/9$.

3. Dalla definizione

$$F_X(t) := \int_{-\infty}^{t} f_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & t \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{t} \frac{1}{x^5}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4x^4}|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{t} = 1 - \frac{1}{4t^4} & t > \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

4. Ricordiamo che per una variabile aleatoria generica $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ da cui $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - F_X(2) = 1/2^6$. Inoltre, essendo $\mathbb{P}(X \leq -2) \leq \mathbb{P}(X \leq 1/\sqrt{2}) = 0$ si ha immediatamente $\mathbb{P}(|X| < 2) = 1 - \mathbb{P}(X > 2) = 63/64$.

5. Utilizzando la continuità della F_X e la stretta monotonia su $(1/\sqrt{2}, +\infty)$, si ha che F_X è biettiva da $(1/\sqrt{2}, +\infty)$ su $(0,1)$ pertanto $F_X(q_\alpha) = \alpha$. In altre parole $t = q_\alpha$ è la soluzione dell'equazione

$$1 - \frac{1}{4t^4} = \alpha$$

cioè $q_\alpha = (4(1-\alpha))^{-1/4}$.

 8994

Esercizio 2 Una moneta che possiede una probabilità $p = 3/4$ di mostrare testa viene lanciata 6 volte.

1. Qual è la probabilità che esca esattamente 4 volte testa?
2. Qual è la probabilità che nei primi 4 lanci esca sempre testa?
3. Qual è la probabilità che sia sempre uscita testa dato che è uscito almeno 4 volte testa?
4. Qual è la probabilità che sia uscita testa al più 5 volte dato che nei primi 4 lanci esce sempre testa?
5. Quanti lanci occorrono come minimo affinché si ottenga almeno 100 volte testa con probabilità non inferiore a 0.95?
6. Supponiamo di avere 3 monete: due con la stessa probabilità $p = 3/4$ che esca testa e una con una probabilità differente $q = 2/3$. Ne viene scelta una a caso tra le tre con ugual probabilità e viene lanciata 6 volte. Sapendo che in 6 lanci è uscita testa esattamente 4 volte qual è la probabilità che sia stata scelta la moneta differente?

Soluzione. Sia $X \sim \mathcal{B}(6, 3/4)$ il numero di teste uscite.

1. La probabilità di avere esattamente 4 teste in 6 lanci è

$$\mathbb{P}(X = 4) = \binom{6}{4}(3/4)^4(1-3/4)^2 = 15\frac{81}{4^6} = 1215/4096 \approx 0.296630859.$$

2. La probabilità che nei primi 4 lanci esca sempre testa (denotiamo tale evento con A) è semplicemente $\mathbb{P}(A) = (3/4)^4 \approx 0.31640625$.

3. Prima di tutto dobbiamo calcolare la probabilità che sia uscito almeno 4 volte testa,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 4) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 6) &= 1215/4096 + \binom{6}{5}(3/4)^5(1-3/4) + \binom{6}{6}(3/4)^6 \\ &= 1215/4096 + 6\frac{243}{4^6} + (3/4)^6 \\ &= 1215/4096 + 1458/4096 + 729/4096 = 3402/4096 \\ &\approx 0.830566406.\end{aligned}$$

A questo punto si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 6 | X \geq 4) &= \frac{\mathbb{P}(X = 6, X \geq 4)}{\mathbb{P}(X \geq 4)} = \frac{\mathbb{P}(X = 6)}{\mathbb{P}(X \geq 4)} \\ &= \frac{729/4096}{3402/4096} = 3/14 \approx 0.214285714.\end{aligned}$$

4. Similmente, essendo $\{X = 6\} \subseteq A$, si ha

$$\mathbb{P}(X = 6|A) = \frac{\mathbb{P}(\{X = 6\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(X = 6)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{729/4096}{81/256} = 729/1296 \approx 0.5625.$$

Otteniamo quindi $\mathbb{P}(X \leq 5|A) = 1 - \mathbb{P}(X = 6|A) = 567/1296 = 7/16 \approx 0.4375$.

In realtà qui c' una soluzione alternativa: dato che i primi 4 lanci hanno dato sempre testa, si ha che esce sempre testa se e solo se nei rimanenti 2 lanci esce sempre testa. Per l'indipendenza tra i lanci questo equivale alla probabilità che in due lanci esca sempre testa cioè $(3/4)^2 = 0.5625$. Più rigorosamente, sia B l'evento "negli ultimi due lanci è sempre uscita testa" allora gli eventi A e B, coinvolgendo blocchi disgiunti di variabili indipendenti, sono indipendenti; chiaramente $\{X = 6\} = A \cap B$ da cui $\mathbb{P}(\{X = 6\}|A) = \mathbb{P}(A \cap B|A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = (3/4)^2 = 0.5625$. La conclusione segue come in precedenza.

5. Osserviamo che il numero di teste ottenute in n lanci, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p) = \mathcal{B}(n, 3/4)$, pertanto se $n \geq 20$ (ed una soluzione accettabile del problema dovrà essere non inferiore a 100) si ha $X_n \approx Y_n \sim \mathcal{N}(n3/4, n3/16)$. Quindi

$$\begin{aligned}0.95 \leq \mathbb{P}(X_n \geq 100) &= \mathbb{P}(X_n > 99.5) \approx \mathbb{P}(Y_n > 99.5) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{Y_n - n3/4}{\sqrt{n3/16}} > \frac{99.5 - n3/4}{\sqrt{n3/16}}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{4 \cdot 99.5 - 3n}{\sqrt{3n}}\Big)\end{aligned}$$

Si tratta quindi di risolvere

$$\begin{cases} t = \sqrt{n} \geq 0 \\ 3t^2 + q_{0.05}\sqrt{3}t - 4 \cdot 99.5 \geq 0 \end{cases}$$

dove $q_{0.05} = -q_{0.95} = -1.6448536$, da cui si ottiene $n \geq t^2 \geq (12.086867809)^2 \approx 146.092373432$, cioè $n \geq 147$.

6. Sia Z la moneta scelta nell'insieme $\{1, 2, 3\}$ (dove per le prime due la probabilità che esca testa è $p = 3/4$, mentre per la terza è $q = 2/3$. Sia X il numero si teste uscite in 6 lanci, allora

$$\mathbb{P}(X = i|Z = j) = \begin{cases} \binom{6}{i}p^i(1-p)^{6-i} & j = 1, 2, \\ \binom{6}{i}q^i(1-q)^{6-i} & j = 3. \end{cases}$$

Ci si chiede quanto valga $\mathbb{P}(Z=3|X=4)$. Sapendo che $\mathbb{P}(Z=j)=1/3$ per ogni $j=1,2,3$, dalla formula di Bayes si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=3|X=4) &= \frac{\mathbb{P}(X=4|Z=3)\mathbb{P}(Z=3)}{\mathbb{P}(X=4|Z=3)\mathbb{P}(Z=3)+\mathbb{P}(X=4|Z=2)\mathbb{P}(Z=2)+\mathbb{P}(X=4|Z=1)\mathbb{P}(Z=1)}\\ &= \frac{\binom{6}{4}q^4(1-q)^{6-4}}{\binom{6}{4}q^4(1-q)^{6-4}+2\binom{6}{4}p^4(1-p)^{6-4}} = \frac{15(2/3)^4(1/3)^2}{15(2/3)^4(1/3)^2+2\cdot 1215/4096}\\ &= \frac{240/729}{240/729+2430/4096} \approx 0.356883801.\end{aligned}$$

Da cui si ha facilmente $\mathbb{P}(Z=1|X=4)=\mathbb{P}(Z=2|X=4)=(1-\mathbb{P}(Z=3|X=4))/2=(1-0.356883801)/2=0.321558099$.