Corso di Statistica - Prof. Fabio Zucca		II Prova in itinere - 1 luglio 2016	
Nome e cognome:		**Matricola:**	

 12957

Esercizio 1 Una macchina per l'imbottigliamento automatico viene utilizzata per riempire dei contenitori di detergente liquido. Se la varianza del volume del liquido immesso nelle bottiglie supera il valore $\sigma_0^2 = 0.004$ allora la proporzione di bottiglie troppo piene o troppo vuote diventa inaccettabile e il processo di imbottigliamento fuori controllo. Si assuma che il volume del liquido segua una distribuzione normale. Da un campionamento di $n = 20$ bottiglie risulta che $\sum_{i=1}^{n} x_i = 149.568$ e che $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1118.661$. Siamo interessati a sapere se vi sono evidenze statistiche per supporre che il processo di imbottigliamento sia fuori controllo.

1. Dichiarare il tipo di test che si intende condurre, dichiarando ipotesi nulla ed alternativa.
2. Eseguire il test e trarre le conclusioni con un livello di significatività $\alpha = 0.05$.
3. Stimare il p-value del test. Se riuscite, svolgete l'interpolazione con tutte le cifre significative disponibili nella tavola arrotondando esclusivamente il risultato alla quarta cifra decimale.
4. Alla luce del valore del p-value appena stimato, trarre le conclusioni con un livello di significatività $\alpha = 0.01$.
5. Cosa concluderemmo ai due livelli di significatività 0.01 e 0.05 scambiando tra loro l'ipotesi nulla e l'alternativa?
6. Calcolare gli estremi di un intervallo di confidenza al 95% di maggiorazione per σ^2 arrotondando esclusivamente il risultato alla quarta cifra decimale.

Soluzione.

1. Dobbiamo svolgere un test di ipotesi sulla varianza di una popolazione normale con media incognita. L'esercizio chiede una evidenza statistica a supporto dell'ipotesi $H : \sigma^2 > \sigma_0^2$. Quindi adotteremo il criterio della condizione forte che vede H collocato in H_1 ricavando: $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ contro $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.

2. La statistica di riferimento è:

$$W_n = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \approx \frac{19 \cdot 0.0069}{0.004} \approx 32.7992$$

Il quantile della χ^2 con $n-1 = 19$ gradi di libertà e di livello $\beta = 1 - \alpha = 0.95$ è

$$\chi^2_{0.95}(19) \approx 30.14351$$

Rifiutiamo se $W_n > \chi^2_{0.95}(19)$ ovvero se $32.7992 > 30.14351$ pertanto l'ipotesi nulla è rifiutata. Si conclude che vi sono evidenze statistiche per affermare, con un livello di significatività del 5%, che il processo sia fuori controllo.

3. $\bar{\alpha} : \chi^2_{1-\bar{\alpha}}(19) = W_n$; dalle tavole si vede immediatamente che $\chi^2_{0.95}(19) < \chi^2_{1-\bar{\alpha}}(19) < \chi^2_{0.975}(19)$ che implica $0.025 < \bar{\alpha} < 0.05$. Volendo interpolare si ha $\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(19)}(W_n)$ dove

$$F_{\chi^2(19)}(32.7992) \approx 0.95 + (0.975 - 0.95)\frac{32.7992 - 30.14351}{32.85234 - 30.14351} \approx 0.97451$$

è la funzione di ripartizione di una chi-quadro con 19 gradi di libertà il cui valore è ricavato dalle tavole per interpolazione lineare.
Pertanto, arrotondando alla quarta cifra decimale: $\bar{\alpha} \approx 0.0255$.

4. Poiché $\alpha = 0.01 < \bar{\alpha}$ e ricordando che il p-value è il più piccolo valore del livello di significatività che porta a rifiutare l'ipotesi nulla, concludiamo che non vi sono evidenze statistiche per affermare, con un livello di significatività dell'1%, che il processo sia fuori controllo.

5. Nello scambio di ipotesi, il nuovo p-value $\bar{\alpha}_1$ soddisfa $\bar{\alpha}_1 = 1 - \bar{\alpha} \in (0.95, 0.975)$ che ci porta, ovviamente, a non rifiutare la nuova ipotesi nulla ad entrambi i livelli.

6. L'intervallo di maggiorazione per σ^2 al 95% ha estremo destro (di maggiorazione) dato da:

$$\sigma_+^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)} = \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{0.05}(19)} = \frac{19 \cdot 0.0069}{10.11701} \approx 0.0130$$

Pertanto, ricordando che la varianza è una quantità non negativa, l'intervallo richiesto è: $[0, 0.0130]$

 12957

Esercizio 2 Un dado viene lanciato 100 volte ottenendo i seguenti risultati

n	1	2	3	4	5	6
$f_{ass}(n)$	16	14	18	17	17	18

1. È plausibile che il dado sia truccato ad un livello di significatività del 5%?
2. Stimare (specificando un intervallo) il P-value del precedente test.
3. Supponiamo ora che il dado venga lanciato 1000 volte e si ottengano gli stessi risultati del caso precedente moltiplicati per 10. È plausibile che il dado sia truccato ad un livello di significatività del 10%?
4. Stimare il P-value del test precedente.
5. Calcolare un intervallo di confidenza al 99% per la probabilità che esca 1 nel caso dei 1000 lanci descritto nei due punti precedenti. Quanti lanci occorrono come minimo per essere certi che l'intervallo di confidenza abbia ampiezza totale non superiore a 0.05 (non conoscendo a priori l'esito dei lanci)?
6. Supponiamo di lanciare ora un secondo dado per 200 volte ottenendo 34 volte il numero 1. Utilizzando i dati originali su 100 lanci del primo dado, possiamo ragionevolmente concludere che le probabilità che esca 1 sono differenti per i due dadi?

Soluzione. La regione di rifiuto del test di adattamento a livello α è $Q > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$ dove k è il numero di classi coinvolte e

$$Q = n \sum_{i^1}^{k} \frac{(p_i - f_{ass}(i)/n)^2}{p_i} = n \sum_{i^1}^{k} \frac{(p_i - f_{rel}(i))^2}{p_i}$$

(p_i probabilità teorica di appartenenza di un dato alla classe i-esima ed n ampiezza del campione). Nel caso specifico $p_i = 1/6$, $k = 6$ mentre $n = 100$ nel primo caso e $n = 1000$ nel secondo. Il P-value del test risolve l'equazione $Q = \chi^2_{1-\bar{\alpha}}(k-1)$. Il test è applicabile in quanto $np_i \geq 5$.

1. Utilizzando i dati a disposizione si ottiene $q = 0.68$. Dalle tabelle $\chi^2_{0.95}(5) = 11.07048 > q$ quindi non si può rifiutare l'ipotesi nulla; pertanto non ci sono evidenze statistiche per affermare che il dado sia truccato (conclusione debole).

2. Dalle disuguaglianze $\chi^2_{0.025}(5) = 0.831209 > \chi^2_{1-\bar{\alpha}}(5) \equiv 0.68 > 0.554297 = \chi^2_{0.01}(5)$ e dalla monotonia del quantile si ha $0.025 > 1 - \bar{\alpha} > 0.01$ cioè $0.99 > \bar{\alpha} > 0.975$. Il calcolatore restituirebbe un valore $\bar{\alpha} \simeq 0.9840482639$.

3. Osserviamo che $f_{rel}(i) = f_{ass}(i)/n$ sono identiche al caso precedente (tutte le grandezze assolute sono state moltiplicate per 10. Rimane il fattore moltiplicativo n prima della somma che definisce Q; questo comporta che la stima q risulta pari a quella precedente moltiplicata per 10, quindi $q = 6.8$. Essendo $\chi^2_{0.9}(5) = 9.236349 > q$, non si può rifiutare l'ipotesi nulla al 10%: non ci sono quindi ragioni sufficienti per affermare che il dado sia truccato.

4. Dalle disuguaglianze $\chi^2_{0.9}(5) = 9.236349 > \chi^2_{1-\bar{\alpha}}(5) \equiv 6.8 > 1.610309 = \chi^2_{0.1}(5)$ e dalla monotonia del quantile si ha $0.9 > 1 - \bar{\alpha} > 0.1$ cioè $0.9 > \bar{\alpha} > 0.1$. Il calcolatore restituirebbe un valore $\bar{\alpha} \simeq 0.2359445377$.

5. Il numero di volte che esce 1 è descritto da una Binomiale $\mathcal{B}(1000, p)$ di parametro p incognito. La stima di p è $\bar{p}_{1000} = 160/1000$. Si osservi che $n\bar{p}_{1000} \geq 5$ e $n(1-\bar{p}_{1000}) \geq 5$ pertanto l'approssimazione gaussiana è buona. Un'intervallo di confidenza a livello $\alpha = 0.99$, ha come estremi

$$\begin{aligned} p^{\pm} &= \bar{p}_{1000} \pm z_{(1+0.99)/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}_{1000}(1-\bar{p}_{1000})}{1000}} = 0.16 \pm 2.5758293035 \cdot \sqrt{0.0001344} \\ &= 0.16 \pm 2.5758293035 \cdot 0.011593101 = \begin{cases} 0.18986185 \\ 0.13013815 \end{cases} \end{aligned}$$

   L'ampiezza massima di un intervallo di confidenza a livello α di una Bernoulli si calcola come

$$2 \cdot z_{(1+\alpha)/2}\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n} \leq 2 \cdot z_{(1+\alpha)/2}\sqrt{1/4n} = z_{(1+\alpha)/2}/\sqrt{n}$$

   da cui $n \geq (z_{0.975}/0.05)^2 = 2653.9586404085$ cioè $n \geq 2654$ (notiamo che con valori così alti di n le condizioni di applicabilità dell'approssimazione gaussiana sono soddisfatte).

6. Si tratta di un test del tipo $H_0 : p_1 = p_2$ contro $H_1 : p_1 \neq p_2$. Notiamo che il test si può condurre, essendo $100\bar{p}_{1,100} = 16 \geq 5$, $100(1-\bar{p}_{1,100}) = 100 - 16 \geq 5$, $200\bar{p}_{2,200} = 34 \geq 5$ e $200(1-\bar{p}_{2,200}) = 200 - 34 \geq 5$.

   La zona di rifiuto è

$$|t| > t_{1-\alpha/2}(298) \approx q_{1-\alpha/2}$$

   dove $t = (\bar{p}_{1,100} - \bar{p}_{2,200})/\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/100 + 1/200)}$ e $\hat{p} = (16+34)/(100+200) = 50/300 = 0.1666666667$. Pertanto $t = (0.16-0.17)/\sqrt{0.1388888889 \cdot (1/100 + 1/200)} = -0.01/\sqrt{0.0020833333} = -0.219089023$. Non essendo fornito alcun livello di significatività, calcoliamo il P-value (utilizzando il fatto che i gradi di libertà sono 298 si può passare all'uso di una normale $\mathcal{N}(0,1)$) $\bar{\alpha} = 2 - 2\Phi(|t|) = 2 - 2\Phi(0.219089023) = 2 - 2 \cdot 0.5867096493 = 0.8265807014$. Un P-value così grande è una chiara indicazione dell'impossibilità di rifiutare H_0, quindi i due dadi sembrano possedere la stessa probabilità di far uscire il numero 1.

   Per chi volesse utilizzare un test meno preciso (**ma è altamente conisgliato utilizzare quello precedente!!!**), $t = (\bar{p}_{1,100} - \bar{p}_{2,200})/\sqrt{p_{1,100}(1-p_{1,100})/100 + p_{2,200}(1-p_{2,200})/200}$, si ha $t =$

$-0.01/0.044124823 = -0.220889992$. Pertanto $\bar{\alpha} = 2 - 2\Phi(|t|) = 0.825178091$ che è una chiara indicazione dell'impossibilità di rifiutare H_0, quindi i due dadi sembrano possedere la stessa probabilità di far uscire il numero 1.