ANALISI MATEMATICA 2
2 prova in itinere
04/02/2013

domanda	1	2	3	4	5	6	7	totale
punteggio	1+3	5	5	5	3+2	2+1	4	31
voto								

Cognome..Nome..
n.di matricola.. Firma...

n.d'iscrizione...........................

1) Sia y=f(x) la funzione 2π –periodica definita in $[-\pi,\pi]$ da f(x)=x($\pi - |x|$)

a) disegnare il grafico qualitativo di f(x) in [-$3\pi, 3\pi$]

b) scrivere la serie di Fourier associata a f, calcolando i coefficienti

b) f(x)=$\frac{8}{\pi}\sum\frac{sen(2k+1)x}{(2k+1)^3}$

Calcoli

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)sennxdx = \frac{2}{\pi}[x(\pi-x)\frac{\cos nx}{n} - \int_0^\pi(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}dx] = \frac{2}{\pi}[x(\pi-x)\frac{sennx}{n^2} - \int_0^\pi(-2)\frac{sennx}{n^2}$$

$$\frac{2}{\pi}[(\pi-2\pi)\frac{sennx}{n^2} - \frac{2\cos nx}{n^2}] = \begin{cases} 8/\pi n^3 & \text{n dispari} \\ 0 & \text{n pari}\end{cases}$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - (\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{senx} - senx})y(x) = \frac{(\cos x)e^{\sqrt{senx}}}{3}y^{-2} \\ y(\pi/4) = 0\end{cases}$$

y(x)= $(e^{\sqrt{senx}}(senx - \sqrt{2}/2))^{1/3}$

$$y'y^2 - (\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{senx} - senx})y^3 = \frac{(\cos x)e^{\sqrt{senx}}}{3}$$

$y^3 = t$ $3y'y^2 = t'$

$$t' - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{senx}}t = \frac{(\cos x)e^{\sqrt{senx}}}{3}$$

t=$e^{\sqrt{senx}}(senx + c)$

y=$(e^{\sqrt{senx}}(senx + c))^{1/3}$

$y(\pi/4) = 0$ per c=-$\sqrt{2}/2$

3)Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) = \dfrac{1}{x^2} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{t^2}\log t + \frac{1}{2t^2}\log^2 t}$$

$Cal\,\mathrm{col}\,i$

Equazione di Eulero x=e^t

y"+4y'+4y=e^{-2t}

y=Ate^{-2t} $+ Be^{-2t}$

y=Ct^{2}e^{-2t} $\to C = 1/2$

y=A$\frac{\log x}{x} + B\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\log^2 x$

per il pb. di Cauchy A=1, B=0

4) Risolvere la seguente equazione

$$y'(t)=\frac{t^2 + ty(t)}{ty(t) + y^2(t)}$$

$$\boxed{y(t) = \pm(t^2 - 1/C^2)^{1/2}}$$

Eq. omogenea

y(t)=tz(t)$\Rightarrow$ $l'eq.diventa$

z+tz'=$\frac{1}{z} \Rightarrow \frac{z}{1-z^2}dz = \frac{dt}{t} \Rightarrow -\frac{1}{2}\log(1-z^2) = \log(Cx) \Rightarrow y(t) = \pm(t^2 - 1/C^2)^{1/2}$

5) Calcolare per serie il seguente integrale: I=$\int_0^1 x^{2/3}\cos x dx$ con E<10^{-2}

$$\boxed{\text{I= } 51/110}$$

calcoli

$$x^{2/3}\cos x = \sum(-1)^n \frac{x^{2n+2/3}}{(2n)!}$$

I=$\int_0^1 \sum(-1)^n \frac{x^{2n+2/3}}{(2n)!}dx = \sum(-1)^n \frac{1}{(2n)!(2n+5/3)}$

E<10^{-2} per n=2

6) Trovare l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)^2}x^{2n}$

$\boxed{I= [-1/2,1/2]}$

calcoli

t=x^2 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)^2} t^n$ $\Rightarrow$converge per $|t| < 1/4 \Rightarrow |x| < 1/2$

La serie converge anche in x=$\pm 1/2$

7) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'''(x)-\frac{1}{x} y''(x) - x = 0$$

$\boxed{y(x)= \frac{x^4}{12} + A\frac{x^3}{6} + Bx + C}$

calcoli

y”(x)=t

t’-$\frac{1}{x} t - x = 0$

t=$e^{\int \frac{1}{x}dx}[c + \int x\frac{1}{x}dx] = x(x+A)$

y’$(x) = \frac{x^3}{3} + A\frac{x^2}{2} + B$

y(x)=$\frac{x^4}{12} + A\frac{x^3}{6} + Bx + C$