Prova scritta di **Analisi Matematica 2** - 6 Settembre 2012

Ingegneria Informatica e delle Telecomunicazioni

Proff. Berchio - Gazzola

Domanda di teoria: Illustrare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione di estremi vincolati.

1) Data la funzione nel piano

$$f(x,y) = \begin{cases} y\log\left(\dfrac{2x^2+y^2}{3x^2+2y^2}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di f nel punto $(x,y)=(0,0)$;

2) Si consideri la curva piana di equazione

$$\mathbf{r}(t) = (2t-\sin(2t), \cos(2t)) \quad \in [0,\pi]\,.$$

a) Dire se $\mathbf{r}$ è una curva regolare (motivare la risposta);

b) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva in $P=(\frac{\pi}{2}-1, 0)$;

c) determinare la lunghezza della curva.

3) Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(3x^2+yze^{xz}\right)\mathbf{i} + e^{xz}\mathbf{j} + \left(z+xye^{xz}\right)\mathbf{k}\,, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

(*a*) Stabilire se F è irrotazionale;

(*b*) E' possibile dedurre da (*a*) che F è conservativo? In caso F sia conservativo, determinarne un potenziale.

4) Dato il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t)\;. \end{cases}$$

a) Scrivere l'integrale generale del sistema in forma scalare e in forma vettoriale;

b) Si determini la natura dell'origine come punto di equilibrio e si tracci un grafico qualitato delle traiettorie nel piano delle fasi in un intorno dell'origine;

Nota: ogni esercizio vale **8** punti, la domanda di teoria verrà valutata solo a coloro che abbiano maturato un punteggio di almeno **24/32** nella votazione complessiva dei quattro esercizi.

SOLUZIONE (6/09/2012)

1) In coordinate polari $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho\sin(\theta)\log\left(\frac{1+\cos^2(\theta)}{2+\cos^2(\theta)}\right)$. Essendo $1/3\le\frac{1+\cos^2(\theta)}{2+\cos^2(\theta)}\le 1$, allora $|\sin(\theta)\log\left(\frac{1+\cos^2(\theta)}{2+\cos^2(\theta)}\right)|\le\log 3$. Da cui $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ tende a zero per $\rho\to 0$ uniformemente rispetto a $\theta\in[0,2\pi)$ e, in particolare, f è continua in $(0,0)$. Inoltre, f è costante sull'asse delle x ($f(x,0)=0$) quindi $f_x(0,0)=0$. D'altra parte,

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=-\log 2$$

e f risulta derivabile in $(0,0)$. Infine, per la differenziabilità occorre provare che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}g(h,k):=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)+\log(2)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0\,.$$

Dal momento che $g(h,h)=\frac{h}{|h|\sqrt{2}}\log(6/5)$, si ha $\lim_{h\to0^-}g(h,h)=-\log(6/5)\sqrt{2}$ e $\lim_{h\to0^+}g(h,h)=\log(6/5)\sqrt{2}$. Da cui non esiste $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}g(h,k)$ e f non è differenziabile in $(0,0)$.

2) a) $\mathbf{r}\in C^1[0,\pi]$ e $\|\mathbf{r}'(t)\|=2\sqrt{(1-\cos(2t))^2+\sin^2(2t)}=4\sin(t)\neq 0$ per ogni $t\in(0,\pi)$, quindi $\mathbf{r}$ è regolare.
b) Si ha $P=\mathbf{r}(\frac{\pi}{4})$ e $\mathbf{r}'(\frac{\pi}{4})=2(1,-1)$ quindi, in forma parametrica, l'equazione della retta tangente alla curva in P è: $\mathbf{r}(\frac{\pi}{4})+t\mathbf{r}'(\frac{\pi}{4})=(\frac{\pi}{2}-1+2t,-2t)$, $t\in\mathbb{R}$. Ricavando t, si ottiene l'equazione cartesiana $x+y=\frac{\pi}{2}-1$.
c) La lunghezza della curva è $\int_0^\pi\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt=4\int_0^\pi\sin(t)\,dt=8$.

3) (a) Si ha $(F_3)_y=xe^{xz}=(F_2)_z$, $(F_1)_z=ye^{xz}+xyze^{xz}=(F_3)_x$ e $(F_2)_x=ze^{xz}=(F_1)_y$, da cui $\mathbf{rot}F=\mathbf{0}$ ed il campo è irrotazionale.
(b) Il dominio di F è tutto $\mathbb{R}^3$ che è un insieme semplicemente connesso, da cui F è un campo conservativo. Sia $U=U(x,y,z)$ il potenziale associato. Imponendo $U_x(x,y,z)=F_1(x,y,z)$ si ottiene $U(x,y,z)=ye^{xz}+x^3+c(y,z)$. Derivando rispetto a y e imponendo $U_y(x,y,z)=F_2(x,y,z)$, si ottiene che $c_y(y,z)=0$, per cui $c(y,z)=k(z)$. Infine, derivando rispetto a z e imponendo $U_z(x,y,z)=F_3(x,y,z)$, si conclude che $k'(z)=z$, ovvero $k(z)=z^2/2$. In definitiva, un potenziale per F è $U(x,y,z)=ye^{xz}+x^3+z^2/2$.

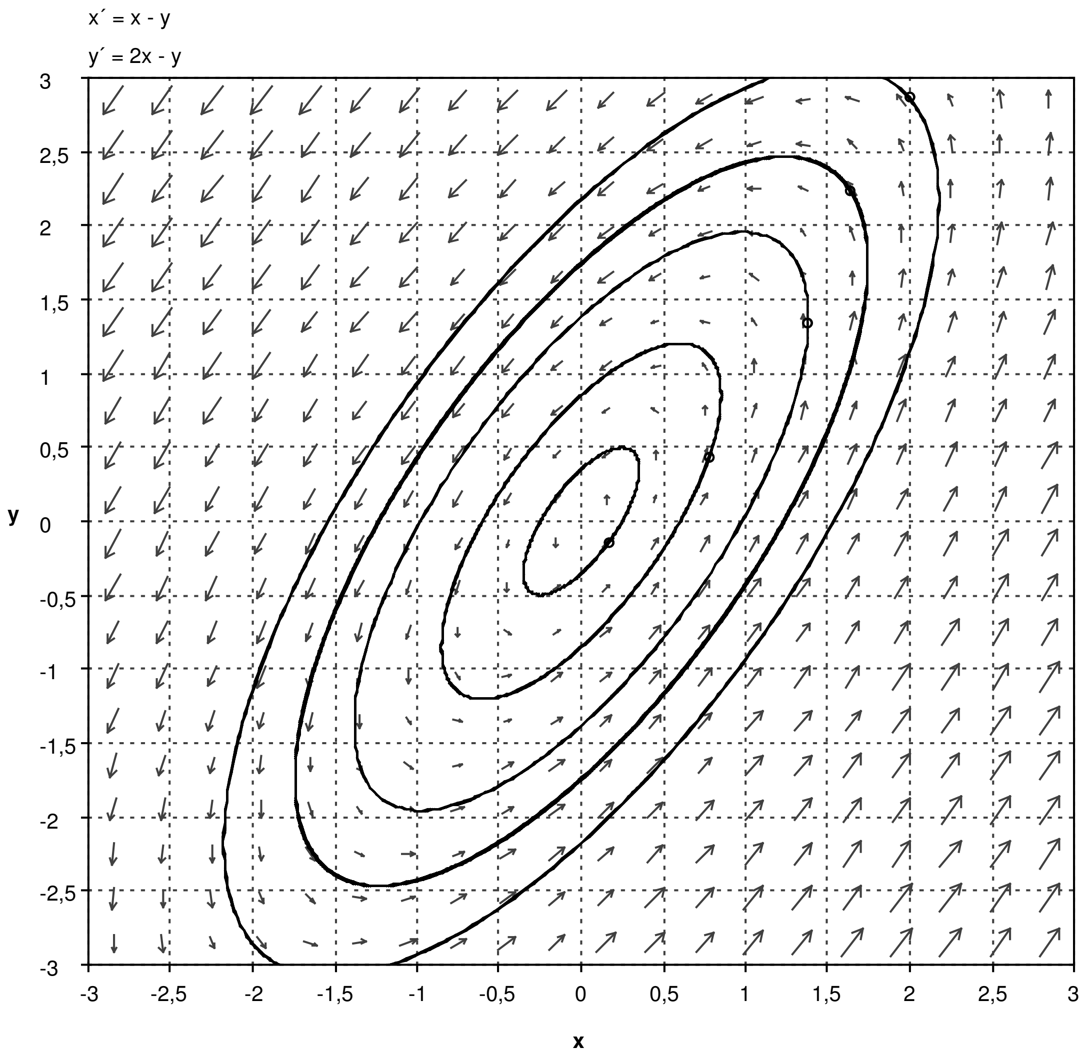
4) a) Utilizziamo il metodo delle integrazioni successive. Integrando la prima equazione e sfruttando entrambe si ottiene

$$x''(t)=x'(t)-y'(t)=x'(t)-2x(t)+y(t)=-x(t)\,.$$

Da cui, integrando l'equazione lineare del secondo ordine $x''(t)+x(t)=0$, si ha che $x(t)=c_1\cos(t)+c_2\sin(t)$ dove $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. D'altra parte, dalla prima equazione $y(t)=x(t)-x'(t)=c_1(\cos(t)+\sin(t))+c_2(\sin(t)-\cos(t))$. In forma vettoriale, l'integrale generale del sistema è

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ \cos(t)+\sin(t) & \sin(t)-\cos(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}.$$

b) La matrice associata al sistema ammette due autovalori complessi coniugati $\lambda_\pm=\pm i$ per cui $O=(0,0)$ è un centro stabile (non asintoticamente), si veda la figura.


x´ = x - y
y´ = 2x - y
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
-2,5
-3
y
-3
-2,5
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
x