LOGICA E ALGEBRA

Recupero prima prova in itinere

7/7/2016

Esercizio 1

Scrivere la tavola di verità di una f.b.f f(A,B.C) da cui si deduca logicamente la formula $\neg(A \wedge B)$ e che sia deducibile da $\neg A \wedge \neg B \wedge C$.

Scrivere la formula f(A,B,C) facendo uso solo dei connettivi $\neg$ e $\Rightarrow$.

Dire se $\neg A \wedge \neg B \wedge C \Rightarrow$ f(A,B,C) è un teorema di L.

Provare che da f(A,B,C) si deduce $\neg(A \wedge B)$ usando la risoluzione.

Esercizio 2

Sia P l'insieme dei numeri naturali primi e S = $\{p^n | \ p \in P, n \in N\}$. In S si consideri la relazione così definita: x R y se e solo se esiste un primo p in P che divida sia x che y, con x e y elementi di S.

1. Si verifichi che R è una relazione d'equivalenza su S e se ne determinino le classi.
2. Si consideri l'applicazione f da S a P definita da f (s) = p se s = p^n e si verifichi che $\frac{S}{R}$ è in corrispondenza biunivoca con P.
3. Si definisca in $\frac{S}{R}$ la relazione T ponendo [p] T [$\bar{p}$] se e solo se p $\leq \bar{p}$ con p, $\bar{p} \in$P, e si mostri che T è una relazione d'ordine in $\frac{S}{R}$.
4. Si dica se $\frac{S}{R}$ rispetto a T ammette massimo e minimo e se $\frac{S}{R}$ rispetto a T è un reticolo.

Motivare ogni risposta data

Soluzione

Esercizio 1

La formula f(*A*,*B*,*C*) deve avere tutti i modelli di $\neg A \wedge \neg B \wedge C$ e tutti i suoi modelli devono essere modelli di $\neg(A \wedge B)$. Pertanto quando v(*A*) = v(*B*) = 0 e v(*C*) = 1 si deve avere v(f(*A*,*B*,*C*)) = 1, inoltre deve essere v(f(*A*,*B*,*C*)) = 0 ogniqualvolta $\neg(A \wedge B)$ vale 0, ovvero se v(*A*) = v(*B*) = 1. Poiché $\neg(A \wedge B)$ è conseguenza semantica di $\neg A \wedge \neg B \wedge C$, una qualsiasi di queste due formule può essere scelta come f(A,B,C).

Una possibile scelta non banale per la tavola di verità di f(*A*,*B*,*C*) è

A	*B*	*C*	f(*A*,*B*,*C*)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

da cui f(*A*,*B*,*C*) ≡ (¬*A*∧¬*B*∨¬*C*)∨(¬*A*∧¬*B*∧*C*) ≡ ¬*A*∧¬*B* ≡ ¬(¬*A*⇒*B*).

La formula $\neg A \wedge \neg B \wedge C \Rightarrow$ f(*A*,*B*,*C*) è un teorema di L in quanto per costruzione si ha $\neg A \wedge \neg B \wedge C$ |=f(*A*,*B*,*C*) da cui per il teorema di deduzione semantica $\neg A \wedge \neg B \wedge C \Rightarrow$ f(*A*,*B*,*C*) è una tautologia e per il teorema di completezza si ha il risultato.

Da f(*A*,*B*,*C*) si deduce $\neg(A \wedge B)$ se e solo se l'insieme Γ={f(*A*,*B*,*C*),¬(¬(A∧B))} è insoddisfacibile cioè se e solo se da Γ, in forma a clausole, si ricava per risoluzione la clausola vuota. Si ha subito che Γ^c={{¬*A*},{¬*B*},{*A*},{*B*}}, dalla prima clausola e dalla terza si ricava per risoluzione clausola vuota.

Esercizio 2

N è da considerarsi come l'insieme degli interi positivi e 1 non è primo. L'insieme S è formato quindi da tutti gli interi che sono potenze ad esponente positivo di un p numero primo.

1. La relazione R si può facilmente scrivere nella forma (x,y)∈R se e solo se x ed y sono potenze di uno stesso numero primo. Ovviamente per ogni x potenza di un primo p si ha (x,x)∈R; se (x,y)∈R allora esiste un numero primo p tale che $x = p^n$, $y = p^m$ con n,m∈*N* da cui si ottiene subito che (y,x)∈R; infine se (x,y)∈R e (y,z)∈R esistono due numeri primi p, q tali che $x = p^n$, $y = p^m$ con n, m∈*N*, $y = q^r$, $z = q^s$ con r, s∈*N*, ma nessun intero può essere potenza di due primi diversi e dunque p = q (e m = r) da cui $z = p^s$ e pertanto (x,z)∈R. Dunque R gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva ed è una relazione di equivalenza. In ogni R-classe cade uno ed un solo numero primo per cui le R-classi sono della forma $[p] = \{p^n \mid n \in N\}$, con p∈P.

2. L'applicazione f da S a P definita da f (s) = p se s = p^n è suriettiva su P in quanto per ogni p si ha f (p) = p. Inoltre ker f coincide con la relazione R, infatti (x,y)∈R se e solo se esiste un numero primo p tale che x = p^n, y = p^m con n, m∈*N*, quindi se e solo se f (x) = f (y), pertanto per il teorema di fattorizzazione delle applicazioni esiste una applicazione biunivoca g da S/R a P definita da g([p]) = p.

3. La relazione T ⊆ S/R × S/R definita ponendo $[p]$ T [$\bar{p}$] se e solo se p ≤ $\bar{p}$ con p, $\bar{p}$ ∈ P è definita utilizzando per ogni classe come rappresentante l'unico numero primo nella classe stessa (ovvero identificando *S*/R con *P*. La relazione è riflessiva in quanto per ogni [x]∈S/R, esiste uno e un solo p tale che [x] = [p] e pertanto [x] è associata tramite T ad ogni classe [q] con q primo maggiore o uguale a p , in particolare [x] = [p] T [p] = [x]. T gode anche della proprietà antisimmetrica in quanto se [x] T [y] e [y] T [x] allora esistono e sono unicamente determinati p, $\bar{p}$ ∈P tali che [x] = [p], [y] = [$\bar{p}$] e dunque da $[p]$ T [$\bar{p}$] e [$\bar{p}$] T$[p]$ si ha p ≤ $\bar{p}$ e $\bar{p}$ ≤ p ovvero p = $\bar{p}$ e quindi [x] = [y]. Infine T gode della proprietà transitiva in quanto se [x] T [y] e [y] T [z] esistono e sono unicamente determinati p, q, r∈P tali che [x] = [p], [y] = [q], [z] = [r] , da cui si ha [p] T [q] e [q] T [r] che implicano p ≤ q, q ≤ r e dunque p ≤ r, cioè [p] T [r] con [x] = [p], [r] = [z]. Dunque T è una relazione d'ordine ed è anche una relazione d'ordine totale in quanto per ogni [p], [q] si ha o p ≤ q oppure q ≤ p.

4. Rispetto a T l'insieme *S*/R ammette come minimo la classe [2], non ha massimo in quanto i numeri primi sono infiniti (e quindi non esiste un numero primo maggiore di tutti gli altri) ed essendo *S*/R un insieme totalmente ordinato rispetto a T, *S*/R è un reticolo.