LOGICA E ALGEBRA

Seconda prova in itinere

7/7/2016

Esercizio 1 Si consideri la seguente formula della logica del primo ordine:

$$\neg(\exists y)\left(A_1^2\left(f_1^2(x,y),b\right)\wedge\neg A_1^2(y,b)\right)\Rightarrow(\exists y)A_1^2\left(f_1^2(x,y),a\right)$$

1. Si stabilisca se è vera, falsa o soddisfacibile ma non vera nell' interpretazione che ha dominio l'insieme Z_6 delle classi di resto modulo 6, in cui la costante a sia la classe uno, la costante b la classe zero, f_1^2 sia da interpretare come prodotto di classi di resto e A^2_1 come l'uguaglianza.
2. Si dica se si tratta di una formula logicamente valida.
3. Si chiuda universalmente la formula data e la si porti in forma normale di Skolem.

Esercizio 2 Sia $G=\left\{\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\;\middle|\; a,b,c\in R\right\}$, dove R è l'insieme dei numeri reali.

1. Si verifichi che G è un gruppo rispetto al prodotto di matrici.
2. Si consideri ora l'applicazione f da (G, .) a (R, +) così definita:

$$f:\ \begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\rightarrow a-c$$

   e si verifichi che f è un omomorfismo di gruppi.

3. Si determini la ker f- classe della matrice identica, si stabilisca se è un sottogruppo di G e, in caso affermativo, se è normale in G.

Motivare ogni risposta data

Soluzione

Esercizio 1

1) Nella interpretazione data la formula $\neg(\exists y)\left(A_1^2\left(f_1^2(x,y),b\right)\wedge\neg A_1^2(y,b)\right)\Rightarrow(\exists y)A_1^2\left(f_1^2(x,y),a\right)$ si legge come "se non esiste una classe y in Z_6 diversa dalla classe [0] e tale che xy è la classe [0], allora esiste una classe y in Z_6 che è inverso di x" o in altre parole, "se x non è la classe [0] e non è un divisore dello zero in Z_6, allora x ha inverso". Le sole classi di Z_6 che soddisfano l'antecedente sono [1] e [5] ed entrambe ammettono inverso, dunque la formula è vera.

2) La formula non è logicamente valida perché preso un dominio qualsiasi con una qualsiasi interpretazione di lettere funzionali e costanti e come interpretazione della lettera funzionale A_1^2 la relazione vuota, il conseguente della formula è sempre falso mentre l'antecedente è sempre vero perché non esistono y che soddisfano $A_1^2\left(f_1^2(x,y),b\right)$ e quindi neppure y che soddisfano $A_1^2\left(f_1^2(x,y),b\right)\wedge\neg A_1^2(y,b)$.

3) La sola variabile libera nella formula data è la x e dunque la chiusura universale della formula è $\forall x\left(\neg(\exists y)\left(A_1^2\left(f_1^2(x,y),b\right)\wedge\neg A_1^2(y,b)\right)\Rightarrow(\exists y)A_1^2\left(f_1^2(x,y),a\right)\right)$.

   Ora

$$\begin{aligned}
&\forall x(\neg(\exists y)\left(A_1^2\left(f_1^2(x,y),b\right)\wedge\neg A_1^2(y,b)\right)\Rightarrow(\exists y)A_1^2\left(f_1^2(x,y),a\right)) \equiv\\
&\forall x((\forall y)\neg\left(A_1^2\left(f_1^2(x,y),b\right)\wedge\neg A_1^2(y,b)\right)\Rightarrow(\exists y)A_1^2\left(f_1^2(x,y),a\right)) \equiv\\
&\forall x(\exists y)(\neg\left(A_1^2\left(f_1^2(x,y),b\right)\wedge\neg A_1^2(y,b)\right)\Rightarrow(\exists y)A_1^2\left(f_1^2(x,y),a\right)) \equiv\\
&\forall x(\exists y)(\exists z)(\neg\left(A_1^2\left(f_1^2(x,y),b\right)\wedge\neg A_1^2(y,b)\right)\Rightarrow A_1^2\left(f_1^2(x,z),a\right)).
\end{aligned}$$

   E così abbiamo la forma normale prenessa della formula data. Introducendo due nuove lettere funzionali *h* e *g* di arità 1, abbiamo la seguente forma di Skolem

$$\forall x\left(\neg\left(A_1^2\left(f_1^2(x,h(x)),b\right)\wedge\neg A_1^2(h(x),b)\right)\Rightarrow A_1^2\left(f_1^2(x,g(x)),a\right)\right).$$

Esercizio 2

1. Tutte le matrici di G hanno determinante 1 e quindi G è un sottoinsieme delle matrici quadrate reali non singolari di ordine 3 che formano, rispetto all'usuale prodotto di matrici, il gruppo $GL_3(R)$. Basta pertanto verificare che G è sottogruppo di tale gruppo. Usiamo il primo criterio: siano A= $\begin{bmatrix}1 & a & b\\0 & 1 & c\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix}1 & d & e\\0 & 1 & f\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ due generici elementi di G, allora si ha AB = $\begin{bmatrix}1 & a+d & e+af+b\\0 & 1 & f+c\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ che appartiene a G perché è una matrice ad elementi reali, triangolare alta con elementi diagonali uguali ad 1. Analogamente si ha che A^{-1} = $\begin{bmatrix}1 & -a & ac-b\\0 & 1 & -c\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ appartiene a G perché è una matrice ad elementi reali,

triangolare alta con elementi diagonali uguali ad 1. Dunque G è sottogruppo di $GL_3(R)$ ed è dunque un gruppo.

2. Per verificare che l 'applicazione f è un omorfismo fra i due gruppi basta verificare che comunque prendiamo A, B∈G vale f(AB) = f(A) + f(B). Siano allora A = $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, dai conti del punto 1 abbiamo che f(AB)= (a+d)-(f+c) e, per definizione, f(A) = a-c, f(B) = d-f, ed essendo in R (a-c)+(d-f) = (a+d)-(f+c) abbiamo l'asserto.

3. La ker f-classe H della matrice identica I_3 è costituita da tutte e sole le matrici di G che hanno mediante f la stessa immagine della I_3. Essendo $f(I_3)=0$ ne segue che le matrici della ker f-classe di I_3 sono tutte e sole le matrici di G per cui a-c = 0 ovvero $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a, b \in R \right\}$. Sappiamo dalla teoria che la classe di congruenza dell'elemento neutro di un gruppo è un sottogruppo normale del gruppo per cui H è sottogruppo normale di G. Si può comunque verificare direttamente che H è un sottogruppo, infatti siano H_1= $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e H_2=$\begin{bmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ due generici elementi di H, allora si ha H_1H_2=$\begin{bmatrix} 1 & a+d & e+ad+b \\ 0 & 1 & d+a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e H_1^{-1}=$\begin{bmatrix} 1 & -a & a^2-b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entrambi appartenenti ad H in quanto hanno uguali gli elementi di posto (1,2) e (2,3). Quindi H e sottogruppo di G, Infine prese due generiche matrici A= $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ∈G e H_2=$\begin{bmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ∈H si ha $A^{-1}H_1A$=$\begin{bmatrix} 1 & d & dc+e-ad \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ che appartiene ancora ad H e dunque H è normale in G.