LOGICA E ALGEBRA

5 febbraio 2016

Parte di Logica

Esercizio 1

In logica proposizionale siano $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ le formule di un opportuno linguaggio proposizionale che traducono le frasi "Se Carlo ha vinto la gara, allora Mario è arrivato secondo e Sergio è arrivato terzo", "Mario non è arrivato secondo", "Carlo non ha vinto la gara" rispettivamente.

1. Dire se $\{\mathcal{A},\mathcal{B}\} \vdash_L \mathcal{C}$
2. Ritrovare il risultato precedente facendo uso della risoluzione.

Esercizio 2

Si consideri la seguente formula $\mathcal{F}$

$$\forall x A_1^2\left(f_1^1(x), f_1^1\left(f_1^1(x)\right)\right) \wedge \forall x A_2^2\left(f_1^1(x), f_1^2(x,y)\right)$$

1. Si dica se la formula è vera, falsa soddisfacibile ma non vera quando si prenda come dominio l'insieme N dei naturali (0 incluso), si interpretino la lettera funzionale f_1^1 come l'operazione che restituisce il successivo, la lettera funzionale f_1^2 come l'operazione di somma, il predicato $A_1^2(x,y)$ come $x < y$ e il predicato $A_2^2(x,y)$ come $x \leq y$
2. Si porti $\mathcal{F}$ in forma prenessa, se ne scrivano le chiusure esistenziale ed universale e si discuta la loro verità/falsità nell'interpretazione data.
3. Si scriva una formula con lo stesso significato di $\mathcal{F}$ nell'interpretazione data, utilizzando un linguaggio del primo ordine in cui si hanno a disposizione la lettera funzionale f_1^2, i predicati $A_1^2(x,y)$ e $A_2^2(x,y)$ e il predicato $S(x,y)$ che indica che y è il successivo di x.

Giustificare ogni risposta

Traccia di soluzione

Esercizio 1

Usiamo le seguenti lettere enunciative:
A: “Carlo ha vinto la gara”
B: “Mario è arrivato secondo”
C: “Sergio è arrivato terzo”

1. La frase $\mathcal{A}$ diventa A ⇒ B ∧ C, la frase $\mathcal{B}$ è ¬B e infine $\mathcal{C}$ è ¬A. Per il teorema di correttezza e completezza forte $\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}\vdash_L \mathcal{C}$ se e solo se $\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}\models\mathcal{C}$, pertanto se e solo se ogni modello di $\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}$ è modello di $\mathcal{C}$. Affinché v sia un modello di $\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}$ deve essere v($\mathcal{B}$) = 1 e quindi v(B) = 0. Ciò implica che v(B∧C) = 0 e dunque anche v(A) = 0 dovendo risultare v($\mathcal{A}$) = 1. Segue che v(¬A) = 1 e pertanto v($\mathcal{C}$) = 1.
2. Come già detto $\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}\vdash_L \mathcal{C}$ se e solo se $\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}\models\mathcal{C}$ e quindi se e solo se $\{\mathcal{A},\mathcal{B}, \neg\mathcal{C}\}$ è insoddisfacibile. Sappiamo che Γ è un insieme di formule insoddisfacibile se e solo se $\Gamma^c\vdash_R\square$. Ora $\{\mathcal{A},\mathcal{B}, \neg\mathcal{C}\}^c$ ={{¬A, B},{¬A, C},{¬B},{A}} e allora da {¬A, B} e {A} si ricava la clausola {B} dalla quale con la clausola {¬B} si ha la clausola vuota.

Esercizio 2

1. In linguaggio naturale con l’interpretazione data la formula $\mathcal{F}$ si legge “per ogni x appartenente ad N il successore di x è strettamente minore del successore del successore di x e per ogni x appartenente ad N il successore di x è minore o uguale di x + y”. Ovviamente è vero che “per ogni x appartenente ad N il successore di x è strettamente minore del successore del successore di x” mentre la frase “per ogni x appartenente ad N il successore di x è minore o uguale di x + y” non è soddisfatta se y assume il valore 0 ed è soddisfatta se y ≥ 1 e dunque è soddisfacibile ma non vera. La formula $\mathcal{F}$ che è la congiunzione delle due formule è dunque soddisfacibile ma non vera.
2. Una forma normale prenessa di $\mathcal{F}$ è
   $\forall x(A_1^2\left(f_1^1(x), f_1^1(f_1^1(x))\right) \wedge A_2^2(f_1^1(x), f_1^2(x,y)))$
   ottenuta ricordando che $\forall x\, A \wedge \forall x\, B \equiv \forall x\, (A \wedge B)$. Osserviamo che applicando nel modo usuale le equivalenze si poteva anche ottenere
   $\forall x \forall z(A_1^2\left(f_1^1(x), f_1^1(f_1^1(x))\right) \wedge A_2^2(f_1^1(z), f_1^2(z,y)))$.
   La chiusura esistenziale è $\exists y \forall x(A_1^2\left(f_1^1(x), f_1^1(f_1^1(x))\right) \wedge A_2^2(f_1^1(x), f_1^2(x,y)))$
   che è una formula vera essendo la chiusura esistenziale di una formula (equivalente ad una formula) soddisfacibile. La chiusura universale è
   $\forall y \forall x(A_1^2\left(f_1^1(x), f_1^1(f_1^1(x))\right) \wedge A_2^2(f_1^1(x), f_1^2(x,y)))$

che è una formula falsa essendo la chiusura universale di una formula (equivalente a una formula) non vera.

3. Utilizzando il nuovo linguaggio del I ordine una formula con lo stesso significato di F si scrive così:
$\forall x \forall y \forall z(S(x,y) \wedge S(y,z) \Longrightarrow A_1^2(y,z)) \wedge \forall x \forall z(S(x,z) \Longrightarrow A_2^2(z, f_1^2(x,y)))$
Per maggiore precisione, usando un linguaggio con identità, ovvero contenente anche il predicato binario U(x,y) da interpretare come uguaglianza, si poteva aggiungere che il successivo di un naturale esiste ed è unico scrivendo $\forall x \exists y \left(S(x,y) \wedge \forall z\big(S(x,z) \Rightarrow U(y,z)\big)\right)$.
Questa formula poteva essere messa in congiunzione con la precedente.

LOGICA E ALGEBRA

5 febbraio 2016

Parte di Algebra

<u>Esercizio 1</u>

Sia X l'insieme di tutte le funzioni da N ad N e sia R la relazione binaria su X definita ponendo:

$(f, g) \in R$ se e solo se esiste un numero naturale k tale che per ogni $x > k$ si abbia $f(x) = g(x)$

a) Si provi che R è una relazione di equivalenza su X
b) Si trovi la classe di equivalenza della funzione f definita da $f(n) = n + 1$.
c) Determinare la classe di equivalenza della funzione identica su N.

<u>Esercizio 2</u>

Sull'insieme $Z \times Z$ si consideri la legge di composizione definita ponendo

$(a, b) \times (c, d) = (a + c, (-1)^c\, b + d)$.

a) Dimostrare che $Z \times Z$ è un gruppo rispetto all'operazione sopra definita.
b) Dire se l'insieme $H = \{(0, b) \mid b \in Z\}$ è un suo sottogruppo e in caso affermativo se è un sottogruppo normale.

<u>Giustificare ogni risposta</u>

Traccia di soluzione

Esercizio 1

1. La relazione R gode della proprietà riflessiva in quanto, preso comunque un numero naturale k, per ogni $x > k$ si ha $f(x) = f(x)$ e dunque $(f,f)\in R$. R gode anche della proprietà simmetrica in quanto $(f,g)\in R$ implica che esiste un k naturale tale che, per ogni $x > k$, $f(x) = g(x)$ e quindi, per ogni $x>k$, anche $g(x) = f(x)$, pertanto $(g,f)\in R$. Infine R gode anche della proprietà transitiva in quanto $(f,g)\in R$ implica che esiste un k_1 naturale tale che, per ogni $x > k_1$, $f(x) = g(x)$, mentre $(g,h)\in R$ implica che esiste un k_2 naturale tale che, per ogni $x > k_2$, $g(x) = h(x)$. Pertanto, per ogni $x > \max\{k_1,k_2\}$, $f(x) = h(x)$ quindi $(f,h)\in R$.
2. La classe di equivalenza della funzione f definita da $f(n) = n + 1$ è composta da tutte le funzioni da N ad N definitivamente uguali ad f, ovvero da tutte e sole le funzioni g tali che esista un intero k_g per cui, per ogni $x>k_g$, $g(x) = x+1$. Si tratta di tutte e sole le funzioni così definite:
$$g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x\leq k_g \\ x+1 & \text{se } x>k_g \end{cases}$$
dove h(x) è una qualsiasi funzione da N ad N.
3. La classe di equivalenza della funzione identica è composta da tutte le funzioni da N ad N definitivamente uguali all'identità, ovvero da tutte e sole le funzioni g tali che esista un intero k_g per cui, per ogni $x>k_g$, $g(x) = x$. Si tratta di tutte e sole le funzioni così definite:
$$g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x\leq k_g \\ x & \text{se } x>k_g \end{cases}$$
dove h(x) è una qualsiasi funzione da N ad N.

Esercizio 2

1. La legge di composizione definita da $(a, b) \times (c, d) = (a + c,(-1)^c b + d)$ è un'operazione interna su $Z\times Z$ in quanto sia $a + c$ sia $(-1)^c b + d$ appartengono a Z. La legge è associativa, infatti
$((a, b) \times (c, d)) \times (e, f) = (a + c, (-1)^c b + d) \times (e, f)=((a + c) + e, (-1)^e((-1)^c b + d) + f)$
$(a, b) \times ((c, d) \times (e, f))= (a, b) \times (c + e, (-1)^e d + f) = (a + (c + e), (-1)^{c+e} b + ((-1)^e d + f))$.
Ora per l'associatività della somma in Z si ha $(a + c) + e = a + (e + c)$ e, per l'associatività di somma e prodotto, la distributività del prodotto rispetto alla somma in Z, si ha anche
$(-1)^e((-1)^c b + d) + f = ((-1)^e(-1)^c b + (-1)^e d) + f = (-1)^{c+e} b + ((-1)^e d + f)$ da cui segue che
$((a, b) \times (c, d)) \times (e, f) = (a, b) \times ((c, d) \times (e, f))$.
L'elemento (0,0) funziona da elemento neutro a destra infatti
$(a,b) \times(0,0) = (a + 0, (-1)^0 b + 0) = (a, b)$. Cerchiamo ora un candidato inverso destro: risulta
$(a, b) \times (c, d) = (0,0)$ se e solo se $a + c = 0$ e $(-1)^c b + d = 0$ da cui si ottiene $c = -a$,
$d= -(-1)^c b = (-1)^{-a+1} b$. Quindi $(-a, (-1)^{-a+1} b)$ è l'inverso destro di (a,b), infatti
$(a,b) \times (-a, (-1)^{-a+1} b) = (a+(-a), (-1)^{-a}b+(-1)^{-a+1}b) = (0,0)$ in quanto $-a$ e $-a+1$ hanno parità diversa.
Dunque, per la riduzione degli assiomi di gruppo, risulta che $(Z\times Z, \times)$ è gruppo.
2. Usiamo il secondo criterio per i sottogruppi e quindi calcoliamo il seguente prodotto:
$(0,a) \times (0,b)^{-1}=(0,a) \times (0,-b) = (0,(-1)^0 a -b))$.

Poiché $(0,a) \times (0,b)^{-1}$ ha la prima componente nulla appartiene ad H che quindi è un sottogruppo. E' immediato verificare che è (un sottogruppo) normale perché
$(a,b)^{-1} \times (0,c) \times (a,b) = (-a, (-1)^{-a+1} b) \times (0,c) \times (a,b)$, ha sempre come prima componente
$-a + 0 + a = 0$ e dunque sta in H.